Всероссийская студенческая олимпиада (Всероссийский тур)
по физике (в технических вузах)
2015 г.

III тур Всероссийской физической олимпиады студентов технических вузов прошел 20 мая 2015 года в Московском государственном техническом университете (МГТУ) им. Н.Э. Баумана.

Победители в командном зачете: команда Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, набравшая 136 баллов - первое место, команда Московского государственного технического университета им Н.Э. Баумана, набравшая 90 баллов - второе место, команда Московского авиационного института, набравшая 70 баллов - третье место.

Победители в личном зачете: Егоров Антон Александрович, СПб ПТУ – первое место, Серов Юрий Михайлович, СПб ПТУ – второе место, Бланк Сергей Сергеевич, МГТУ им. Н.Э. Баумана - третье место.

Задачи олимпиады

Задача 1. Ракета массы m находится на расстоянии r от цели. В начальный момент времени скорость ракеты равна V_0, а угол между вектором скорости и линией, соединяющей ракету и цель, равен α. Задача, поставленная перед ракетой, заключается в том, чтобы достичь цели за минимально возможное время. Определить модуль силы тяги ракеты F, считая, что его величина в процессе движения остаётся постоянной. При этом время затраченное ракетой, чтобы достичь цели за минимальное время, известно и равно t.

Задача 2. Горизонтальная платформа вращается относительно вертикальной оси с угловой скоростью ω_0. По платформе по спирали скользит тело, таким образом, что угол α между вектором скорости V и радиус-вектором r остается постоянным. Определить зависимость скорости тела V от радиуса r и угол α, если известно, что коэффициент трения между телом и платформой равен k. Известно также, что $\omega_0 r >> V$ на всех участках траектории.

Задача 3. Тело массой m находится в начальный момент времени в точке $x = 0$ в покое в поле квазиупругих сил $F_0 = - kx$. С момента времени $t = 0$ на тело вдоль оси x начинает действовать сила $F = \alpha t$. Определить амплитуду колебаний тела в процессе дальнейшего движения и его среднюю скорость.

Задача 4. По двум одинаковым трубам протекает жидкость, удельная объёмная теплоемкость которой равна C, а объёмный расход равен G. Трубы проходят через термодинамическую установку, которая посредством совокупности идеальных тепловых машин осуществляет теплообмен между трубами, причем все процессы можно считать равновесными. Первая труба с температурой на входе T_{10}, используется как нагреватель, вторая с температурой на входе T_{20}, используется как холодильник. Определить максимальную мощность, которую может вырабатывать вся совокупность тепловых машин.

Задача 5. Определить ёмкость плоского металлического диска радиуса R. При расчетах диск можно моделировать диэлектрической сферой радиуса R, равномерно заряженной по поверхности, которую сжимают вдоль оси диска в n раз ($n \to \infty$). При этом считать, что поле внутри образующегося эллипсоида в процессе сжатия всегда равно нулю.

Задача 6. Между двумя соосными длинными соленоидами одинаковой длины L и радиусами R и $2R$ с плотностями намотки $3n$ и n соответственно находится заряженная частица массой m и зарядом q на расстоянии r ($R < r < 2R$). Через эти последовательно включенные обмотки соленоидов протекает переменный ток. В начальный момент времени ток и скорость частицы равны 0. Определить радиус, при котором траектория частицы является дугой окружности радиуса r.

Задача 7. Заряженная частица с зарядом q массой m движется со скоростью v в магнитном поле диполя в плоскости перпендикулярной оси диполя. Магнитное поле диполя меняется по закону $B = a/r^3$. Определить минимальное расстояние, на которое может приблизиться частица к диполю, если начальное расстояние

$$r_0 \square \sqrt{\frac{qa}{mV}}.$$

Задача 8. Луч естественного света интенсивности I, пройдя через поляризатор, проходит затем через анизотропный кристалл толщиной L = 1 мм таким образом, что расщепление на обыкновенный и необыкновенный луч в пространстве не происходит. При этом показатели преломления для обыкновенного и необыкновенного луча, плоскости поляризации которых перпендикулярны, отличаются на $\Delta n = 0.2$. Угол между плоскостью поляризации поляризатора и обыкновенного луча равен $\pi/6$. Далее на пути луча установлен анализатор, плоскость поляризации которого перпендикулярна плоскости поляризации поляризатора. Определить интенсивность прошедшего через систему луча. Потерями на поглощение и отражение пренебречь.

Решение задач

Решение задачи 1. Пусть V - скорость ракеты у цели, проекция этой скорости на радиус-вектор r равна V_1, проекция перпендикулярная радиус-вектору r равна V_2. Изменение скорости за время полета равно $\Delta V=V-V_0$, для достижения минимального времени полное ускорение a должно быть направлено по вектору изменения скорости ΔV. Следовательно, движение по осям равноускоренное, с проекциями ускорения a_1 и a_2 соответственно. Тогда: $a_1 = \dfrac{V_1 - V_0\cos\alpha}{t}$, $a_2 = \dfrac{2V_0\sin\alpha}{t}$, $r = \dfrac{V_1 + V_0\cos\alpha}{2}t$, решая данную систему и учитывая, что $F = ma$ получаем ответ.

Ответ: $F = m\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $a_2 = \dfrac{2V_0\sin\alpha}{t}$, $a_1 = \dfrac{2r}{t} - \dfrac{2V_0\cos\alpha}{t}$.

Решение задачи 2. Из условия задачи $\omega_0 r >> V$ следует, что поскольку вектор скорости точки платформы, которую касается тело, равен по модулю $\omega_0 r$ и направлен перпендикулярно радиус-вектору r, то сила трения постоянна и равна kmg. Равноускоренное движение вдоль траектории осуществляется под действием силы $kmg\sin\alpha = ma_\tau$, откуда $V = \sqrt{2lkg\sin\alpha}$. Учитывая, что $l\cos\alpha = r$, $V = \sqrt{\dfrac{2rkg\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \sqrt{2kgr\,\mathrm{tg}\,\alpha}$, таким образом зависимость скорости $V(r)$ определена.

Найдем угол α. Угловая скорость радиус-вектора равна $\omega = \dfrac{V\sin\alpha}{r} = \dfrac{\sqrt{2kg\,\mathrm{tg}\,\alpha}\sin\alpha}{\sqrt{r}}$.

Угловая скорость радиус-вектора должна быть равна угловой скорости вектора скорости для сохранения постоянства угла α. Поэтому $mV\omega = kmg\cos\alpha$, $\dfrac{V^2\sin\alpha}{r} = kg\cos\alpha$,

$2\,\mathrm{tg}\,\alpha\sin\alpha = \cos\alpha$, $\alpha = \mathrm{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $V = \sqrt{2kgr\,\mathrm{tg}\,\alpha}$, $\alpha = \mathrm{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Решение задачи 3. Уравнение движения тела $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + kx = \alpha t$, его решение $x = \dfrac{\alpha}{m\omega^2}t + A\sin(\omega t + \varphi)$, где $\omega^2 = k/m$. Из начальных условий $x = 0$, $t = 0$ получаем $\varphi = 0$.

При $t = 0$, $V = 0$, $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\alpha}{m\omega^2} + A\omega\cos(\omega t) = 0$, $A = \dfrac{\alpha}{m\omega^3} = \alpha\sqrt{\dfrac{m}{k^3}}$.

Ответ: $V = \alpha/k$, $A = \alpha\sqrt{\dfrac{m}{k^3}}$.

Решение задачи 4. Элементарная мощность отбираемая от первой трубы dN_1 на участке, где температура T_1 , перепад dT_1, равна $dN_1 = CGdT_1$, мощность отдаваемая второй трубе dN_2 на участке, где температура равна T_2, перепад dT_2, равна $dN_2= CGdT_2$. Пусть на выходе из первой и второй трубы температуры равны соответственно T_{11}, T_{21}. Мощность отбираемая от первой трубы $N_1 = CG(T_{10}-T_{11})$, для второй трубы $N_2 = CG(T_{21}-T_{20})$, откуда мощность тепловой машины $N = N_1 - N_2$. Учитывая, равновесность всех процессов, $\frac{dN_1}{T_1}=\frac{dN_2}{T_2}$, $\frac{dT_1}{T_1}=\frac{dT_2}{T_2}$, $\ln\frac{T_{10}}{T_{11}}=\ln\frac{T_{21}}{T_{20}}$.

$$N = N_1 - N_2 = CGT_{10}\left(1-\frac{T_{11}}{T_{10}}\right)-CGT_{21}\left(1-\frac{T_{20}}{T_{21}}\right)=CG\left(1-\frac{T_{20}}{T_{21}}\right)\left(T_{10}-T_{21}\right).$$

$$\frac{dN}{dT_{21}}=-CG\left(1-\frac{T_{20}}{T_{21}}\right)+CG\frac{T_{20}}{T_{21}^2}\left(T_{10}-T_{21}\right)=CG\left(\frac{T_{20}}{T_{21}}-1+\frac{T_{10}T_{20}}{T_{21}^2}-\frac{T_{20}}{T_{21}}\right)=0.$$ Откуда $\frac{T_{10}T_{20}}{T_{21}^2}=1$,

$T_{21}^2=T_{10}T_{20}$, $T_{21}=\sqrt{T_{10}T_{20}}$, $\frac{T_{10}T_{20}}{T_{21}}=T_{11}=\sqrt{T_{10}T_{20}}$. Тогда $N=N_1-N_2=CG\left(T_{10}+T_{20}-2\sqrt{T_{10}T_{20}}\right)$.

Ответ: $N=CG\left(T_{10}+T_{20}-2\sqrt{T_{10}T_{20}}\right)$.

Решение задачи 5. Заряд dq в интервале радиусов dr останется при растяжении - сжатии остается неизменным. $dq=2\sigma_0 Rd\alpha 2\pi r=\sigma_0\frac{dr}{\sin(\alpha)}4\pi r=\sigma_0\frac{Rdr}{\sqrt{R^2-r^2}}4\pi r$. Определим

потенциал в центре диска: $\varphi=\int\limits_0^R\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}=\int\limits_0^R\frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0 r}\frac{Rdr}{\sqrt{R^2-r^2}}4\pi r=\frac{R\sigma_0}{\varepsilon_0}\int\limits_0^1\frac{d\frac{r}{R}}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}}4\pi r=$

$=\frac{R\sigma_0}{\varepsilon_0}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\sin(x)}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}=\frac{R\sigma_0\pi}{2\varepsilon_0}$. Откуда емкость $C=\frac{q}{\varphi}=\frac{4\pi R^2\sigma_0 2\varepsilon_0}{R\sigma_0\pi}=8\varepsilon_0 R$.

Ответ: $C = 8\varepsilon_0 L$.

Решение задачи 6. Чтобы движение происходило по окружности постоянного радиуса r, необходимо выполнение следующего условия:

$r=\frac{mV}{qB}=\frac{mdV}{qdB}=\frac{m\frac{dV}{dt}}{q\frac{dB}{dt}}=\frac{E}{\frac{dB}{dt}}=\frac{\frac{d\Phi}{dt}}{2\pi r\frac{dB}{dt}}=\frac{\Phi}{2\pi rB}$, $\Phi = 2\pi r^2 B$, где Φ – поток через окружность радиуса r, B - магнитное поле на радиусе r. Пусть ток в соленоидах I, магнитное поле между соленоидами $B_b = \mu_0 nI$. Внутри малого соленоида $B_m = \mu_0 3nI+ \mu_0 nI$. Поток через окружность радиуса $R < r < 2R$, $\Phi = \pi R^2\mu_0 3nI+\pi r^2\mu_0 nI = 2\pi r^2 B = 2\pi r^2\mu_0 nI$, $3R^2+r^2 = 2r^2$, $r=\sqrt{3}R$.

Ответ: $r=\sqrt{3}R$.

Решение задачи 7. Скорость остается постоянной, меняется момент импульса. $\Delta L=\int\limits_{r_0}^{r}qV_r rdt=\int\limits_{r_0}^{r}q\frac{dr}{dt}\frac{a}{r^3}rdt=\int\limits_{r_0}^{r}q\frac{a}{r^2}dr=qa\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)\approx\frac{qa}{r}$. Чем больше изменение момента импульса ΔL, тем ближе приблизится частица к диполю. Следовательно, начальный момент импульса L_1 в процессе движения уменьшается и достигает в ближайшей к диполю точке значения $L_2 = \pm mVr$, $L_1\pm mVr = qa/r$. Определим минимальное значение L_1

при $L_2 = mVr$, $\frac{dL_1}{dr} = -\frac{qa}{r^2} + mV = 0$, $r = \sqrt{\frac{qa}{mV}}$, $L_{1\min} = 2\sqrt{qamV}$. Следовательно, если знак момента импульса не меняется, т.е. происходит облет диполя, минимальное расстояние равно $r = \sqrt{\frac{qa}{mV}}$. При дальнейшем уменьшении в L_1 точке минимального радиуса L_2 = -mVr примет отрицательное значение, т.е. отражение от диполя. $L_1 + mVr = qa/r$, $r^2 + \frac{L_1}{mV}r - \frac{qa}{mV} = 0$, $r = -\frac{L_1}{2mV} \pm \sqrt{\frac{L_1^2}{4m^2V^2} + \frac{qa}{mV}}$. При $L_1 = 0$, $r = \sqrt{\frac{qa}{mV}}$, при $L_1 = 2\sqrt{qamV}$ $r = \left(\sqrt{2} - 1\right)\sqrt{\frac{qa}{mV}}$. Экстремума в интервале L_1 от 0 до $2\sqrt{qamV}$ нет.

Ответ: $r = \left(\sqrt{2} - 1\right)\sqrt{\frac{qa}{mV}}$.

Решение задачи 8. Интенсивность обыкновенного и необыкновенного луча $I_{об} = I_0\cos^2\alpha$, $I_{необ} = I_0\sin^2\alpha$, при этом лучи взаимно когерентны. При прохождении через кристалл оптическая разность хода $\Delta nl >> \lambda$, и лучи станут некогерентными, интерференция не происходит. Пусть плоскость поляризации под углом α к плоскости поляризации обыкновенного луча $I = I_{об}\sin^2\alpha + I_{необ}\cos^2\alpha = 2I_0\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1/2 I_0\sin^2 2\alpha = 3\ I_0/8$.

Ответ: $I = 3\ I_0/8$.