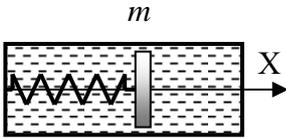


Лекция 6. «Колебания» (продолжение).

Свободные затухающие колебания. Декремент и логарифмический декремент колебаний. Вынужденные колебания. Установившиеся вынужденные колебания. Механический резонанс.



Рассмотрим движение тела в вязкой среде под действием квазиупругой силы вблизи положения равновесия (например, движение поршня на невесомой пружине). Будем считать, что сила сопротивления пропорциональна скорости тела:

$$\vec{F}_{\text{сопр}} = -r \cdot \vec{v}, \text{ где } r \text{ — коэффициент сопротивления (Н·с/м)}$$

Уравнение движения поршня можно записать в виде $ma = -kx - rv$ или

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

где введены обозначения $2\beta = \frac{r}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Это уравнение называется *уравнением свободных затухающих колебаний*. Если $r = 0$, то получаем уравнение свободных незатухающих колебаний $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ с периодом $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Полная механическая энергия системы равна сумме кинетической и потенциальной энергий

$$W_{\text{Мех}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = m \left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \omega_0^2 \frac{x^2}{2} \right).$$

Для затухающих колебаний механическая энергия не остаётся постоянной а убывает:

$$\frac{dW_{\text{Мех}}}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ m \left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \omega_0^2 \frac{x^2}{2} \right) \right\} = m (\dot{x}\ddot{x} + \omega_0^2 x\dot{x}) = m\dot{x}(\ddot{x} + \omega_0^2 x) = m\dot{x}(-2\beta\dot{x}) = -r\dot{x}^2 < 0.$$

Будем искать решение уравнения свободных затухающих колебаний в виде $x = e^{\lambda t}$. Подставив в уравнение и, сокращая, получаем *характеристическое уравнение*

$$\lambda^2 + 2\beta \cdot \lambda + \omega_0^2 = 0.$$

Дискриминант этого квадратного уравнения $D = 4\beta^2 - 4\omega_0^2$,

$$\text{значения корней } \lambda_{1,2} = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}.$$

Поэтому решение уравнения должно иметь вид

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} = e^{-\beta t} \left(C_1 e^{t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} + C_2 e^{-t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \right),$$

где C_1 и C_2 — постоянные коэффициенты.

Воспользуемся формулой Эйлера: $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$, где $i = \sqrt{-1}$.

При $\beta^2 - \omega_0^2 > 0$ решение не описывает колебания.

Колебания будут наблюдаться, если $\beta^2 - \omega_0^2 < 0$. Введем обозначение $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$.

Тогда $\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-\omega^2} = i \cdot \omega$ и решение уравнения примет вид

$$x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi).$$

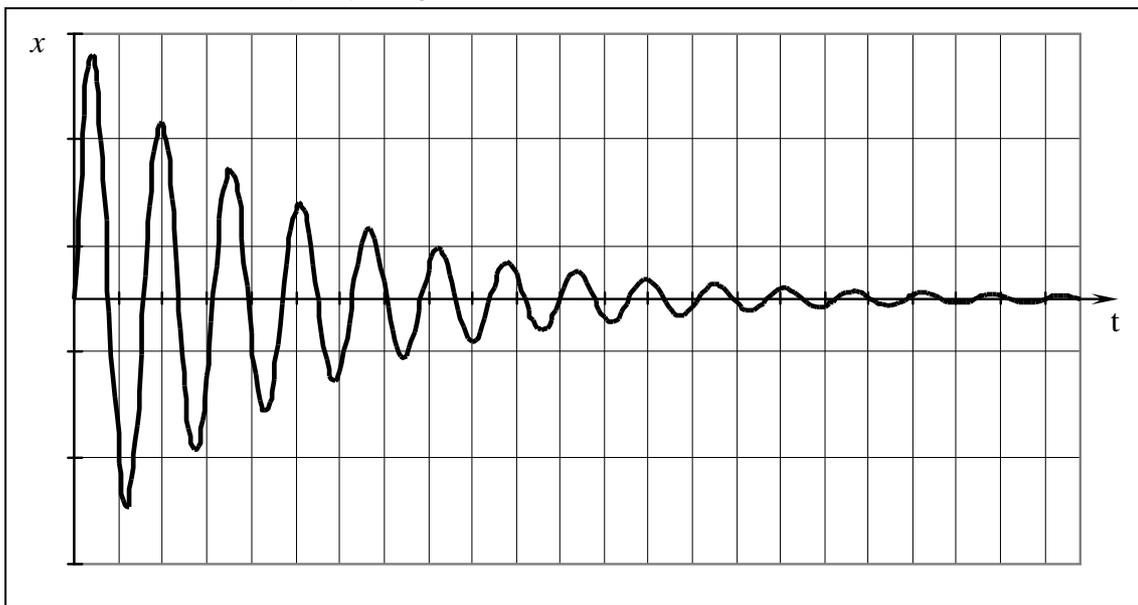
Оно описывает *свободные колебания* циклической частоты ω , *затухающие* с течением времени. Циклическая частота затухающих колебаний $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, период

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Необходимым условием колебательного движения является неравенство $\beta < \omega_0$.

Величина $A = A_0 e^{-\beta t}$ является *амплитудой затухающих колебаний*. С течением времени амплитуда убывает – говорят, что колебания *затухают*. *Временем затухания* (временем *релаксации*) называется время τ , за которое амплитуда убывает в e раз

$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+\tau)}} = e, \quad e^{\beta\tau} = e, \quad \text{откуда } \tau = \frac{1}{\beta}.$$



Число полных колебаний, совершаемое системой за это время $N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T}$.

Декремент затухания – отношение амплитуд колебаний спустя период

$$\Delta = \frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}.$$

Логарифмический декремент затухания $\delta = \ln \Delta = \beta T$. Поэтому $N_e = \frac{1}{\delta}$.

Величина $Q = \pi N_e = \frac{\pi}{\delta}$ называется *добротностью колебательной системы*.

Энергию колебаний в момент времени t можно определить как $W = \frac{kA^2}{2} = \frac{kA_0^2 e^{-2\beta t}}{2}$.

Убыль энергии за один период $W_1 - W_2 = \frac{kA_0^2 e^{-2\beta t}}{2} - \frac{kA_0^2 e^{-2\beta(t+T)}}{2} = \frac{kA_0^2 e^{-2\beta t}}{2} (1 - e^{-2\beta T})$.

Рассмотрим отношение запасенной энергии к убыли энергии за один период колебаний

$$\frac{W}{W_1 - W_2} = \frac{1}{1 - e^{-2\beta T}}.$$

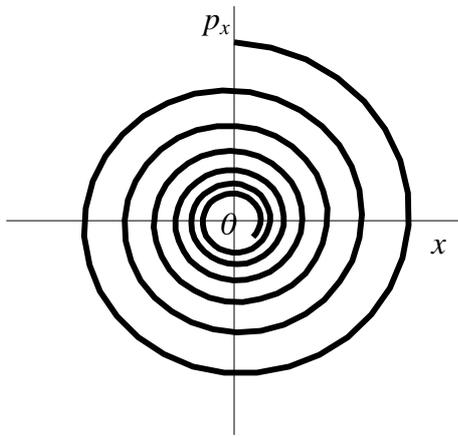
При малом логарифмическом декременте затухания $\delta = \beta T \ll 1$ воспользуемся разложением

$1 - e^{-2\beta T} = 1 - (1 - 2\beta T + \dots) \approx 2\beta T$. Т.к., $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ и при малых β можно приближенно считать $\omega \approx \omega_0$, то

$$\frac{W}{W_1 - W_2} = \frac{1}{2\beta T} = \frac{1}{2\beta \frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega}{2\beta 2\pi} = \frac{Q}{2\pi}.$$

Для затухающих свободных колебаний добротность характеризует скорость убывания энергии при малых затуханиях.

Фазовый портрет свободных затухающих колебаний.



Пусть задан закон колебательного движения

$$x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha).$$

Тогда скорость при колебаниях

$$v_x = \dot{x} = -\beta A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha) + \omega A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha).$$

Импульс

$$p_x = m v_x = -m\beta A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha) + m\omega A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha).$$

Так как $\sin(\omega t + \alpha) = \frac{x}{A_0 e^{-\beta t}}$ и $\cos(\omega t + \alpha) = \frac{p_x + m\beta x}{m\omega A_0 e^{-\beta t}}$, то

$$\sin^2(\omega t + \alpha) + \cos^2(\omega t + \alpha) = \left(\frac{x}{A_0 e^{-\beta t}}\right)^2 + \left(\frac{p_x + m\beta x}{m\omega A_0 e^{-\beta t}}\right)^2 = 1.$$

Фазовая траектория представляет собой сужающуюся к нулевой точке спираль (т.к. с течением времени значения x и p_x стремятся к нулю). Вращение происходит по часовой стрелке.

Вынужденные колебания.

Рассмотрим движение тела в вязкой среде вблизи положения равновесия под действием квазиупругой силы и некоторой периодической силы

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t + \alpha).$$

Второй закон Ньютона $ma = -kx - rv + F(t)$ перепишем в виде

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\Omega t + \alpha)$$

где введены обозначения $2\beta = \frac{r}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $f_0 = \frac{F_0}{m}$. Это уравнение называется *уравнением вынужденных колебаний*. Решением этого обыкновенного дифференциального уравнения является сумма решений *однородного* и частного решения *неоднородного* уравнений.

Однородное уравнение

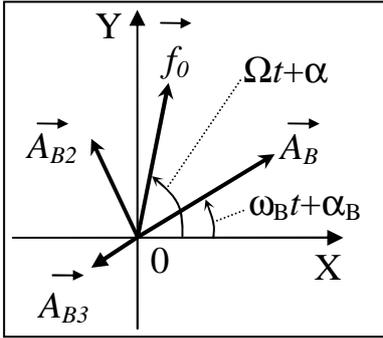
$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

является уравнением свободных затухающих колебаний.

Частное решение неоднородного уравнения

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\Omega t + \alpha)$$

будем искать в виде $x_B = A_B \cos(\omega_B t + \alpha_B)$. Изобразим это уравнение на амплитудно-



векторной диаграмме, на которой величине $\omega_0^2 x_B = \omega_0^2 A_B \cos(\omega_B t + \alpha_B)$ соответствует вектор \vec{A}_{B1} , такой что $|\vec{A}_{B1}| = \omega_0^2 A_B$.

Так как $\dot{x}_B = -\omega_B A_B \sin(\omega_B t + \alpha_B) = \omega_B A_B \cos\left(\omega_B t + \alpha_B + \frac{\pi}{2}\right)$, то величине $2\beta \dot{x}_B = 2\beta \omega_B A_B \cos\left(\omega_B t + \alpha_B + \frac{\pi}{2}\right)$ соответствует

вектор \vec{A}_{B2} , повернутый относительно вектора \vec{A}_{B1} на угол $\frac{\pi}{2}$, длина которого

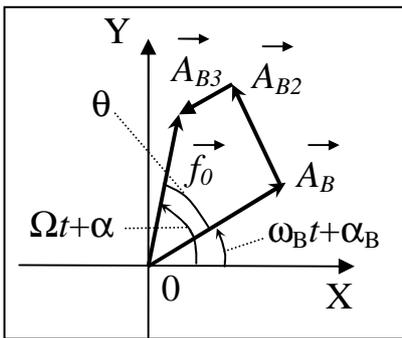
$$|\vec{A}_{B2}| = 2\beta \omega_B A_B.$$

Величине $\ddot{x}_B = -\omega_B^2 A_B \cos(\omega_B t + \alpha_B) = \omega_B^2 A_B \cos(\omega_B t + \alpha_B + \pi)$ соответствует вектор \vec{A}_{B3} , повернутый на угол π относительно вектора \vec{A}_{B1} и $|\vec{A}_{B3}| = \omega_B^2 A_B$.

В правой части уравнения величине $f_0 \cos(\Omega t + \alpha)$ соответствует вектор \vec{f}_0 .

Уравнению $\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\Omega t + \alpha)$ будет соответствовать векторная сумма

$$\vec{A}_{B1} + \vec{A}_{B2} + \vec{A}_{B3} = \vec{f}_0.$$



Так как длины векторов не меняются, то это равенство возможно только для случая $\omega_B = \Omega$. Таким образом, *вынужденные колебания происходят с частотой вынуждающей силы.*

Из диаграммы следует, что при этом должно выполняться равенство $f_0^2 = (A_{B1} - A_{B3})^2 + A_{B2}^2$, поэтому получаем

$$f_0^2 = (\omega_0^2 A_B - \Omega^2 A_B)^2 + (2\beta \Omega A_B)^2.$$

Откуда находим амплитуду вынужденных колебаний:

$$A_B = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}.$$

Обозначим $\theta = \alpha - \alpha_B$ - разность фаз вынуждающей силы и вынужденных колебаний.

Из диаграммы следует, что $\operatorname{tg} \theta = \frac{A_{B2}}{A_{B1} - A_{B3}}$, т.е. $\operatorname{tg} \theta = \frac{2\beta \omega_B A_B}{\omega_0^2 A_B - \omega_B^2 A_B} = \frac{2\beta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$.

Таким образом, при $\omega_0 > \Omega$ получаем, что $\theta > 0$ - вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы, а при $\omega_0 < \Omega$ - вынужденные колебания опережают по фазе вынуждающую силу.

Следствие. Под действием периодической силы тело совершает два вида колебаний - свободные затухающие с собственной частотой ω , и вынужденные - с частотой вынуждающей силы Ω . Затухающие колебания с течением времени прекратятся и останутся только вынужденные колебания - их называют *установившимися*.

Резонанс – явление резкого возрастания амплитуды установившихся колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к собственной резонансной частоте системы.

Найдем, при какой частоте вынуждающей силы амплитуда вынужденных колебаний будет иметь максимальное значение. Для этого найдем экстремум амплитуды: $\frac{\partial A_B}{\partial \Omega} = 0$,

$$\frac{\partial A_B}{\partial \Omega} = -\frac{1}{2} \frac{f_0 (2(-2\Omega)(\omega_0^2 - \Omega^2) + 8\beta^2 \Omega)}{\left((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2\right)^{3/2}} = \frac{f_0 \Omega (\omega_0^2 - \Omega^2 - 2\beta^2)}{\left((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2\right)^{3/2}} = 0.$$

Первое решение $\Omega=0$ соответствует постоянной сдвигающей силе и отсутствию вынужденных колебаний.

Второе (ограниченное) решение $\Omega_{REZ} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ называется *резонансной частотой системы*. Отсюда вытекает условие возникновения резонанса $\beta < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$.

Амплитуда колебаний при резонансе

$$A_{B_REZ} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2\beta^2)^2 + 4\beta^2 (\omega_0^2 - 2\beta^2)}} = \frac{f_0}{\sqrt{4\beta^2 \omega_0^2 - 4\beta^4}} = \frac{f_0}{2\beta \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}.$$

Предельное значение амплитуды вынужденных колебаний при постоянной (сдвигающей) силе (когда $\Omega=0$) – это статическое отклонение на величину

$$A_{0B} = \frac{f_0}{\omega_0^2}.$$

Рассмотрим отношение $\frac{A_B}{A_{0B}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4\frac{\beta^2}{\omega_0^2} \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}}$.

При резонансе оно примет вид $\frac{A_{B_REZ}}{A_{0B}} = \frac{1}{2\frac{\beta}{\omega_0} \sqrt{1 - 2\frac{\beta^2}{\omega_0^2}}}$.

Обозначим $x = \frac{\Omega}{\omega_0}$ и построим графики зависимости амплитуды от частоты для различных значений параметров. (График зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты называется *резонансной кривой*.).

Зависимость резонансной частоты и резонансной амплитуды от параметра затухания

| β/ω_0 | 0,04 | 0,07 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 |
|-----------------------------|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Ω/ω_0 | 0,99839871 8 | 0,995088 | 0,989949 | 0,959166 | 0,905539 | 0,824621 |
| $\frac{A_{B_REZ}}{A_{0B}}$ | 12,5200481 3 | 7,178117 | 5,050763 | 2,60643 | 1,840525 | 1,515848 |

Резонансная кривая

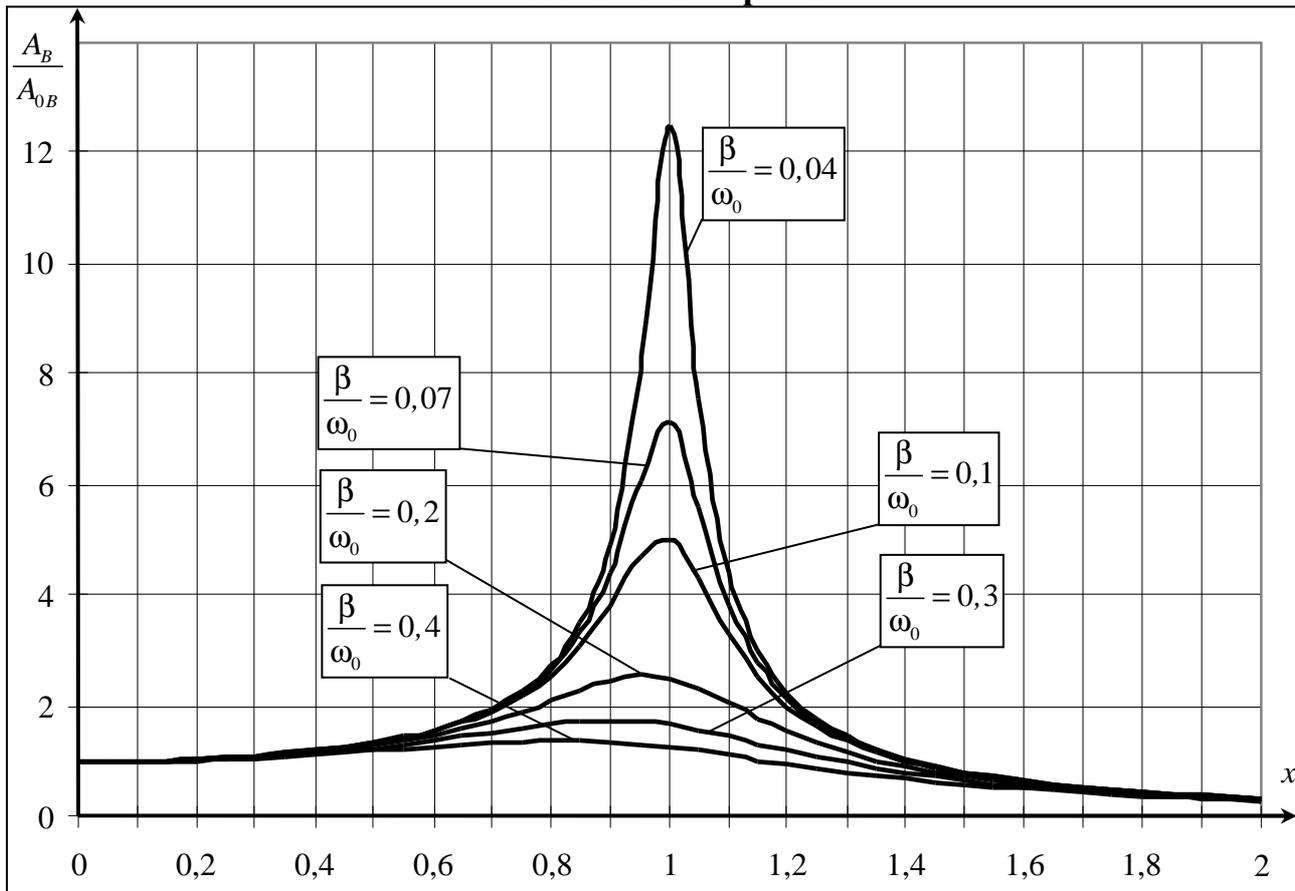
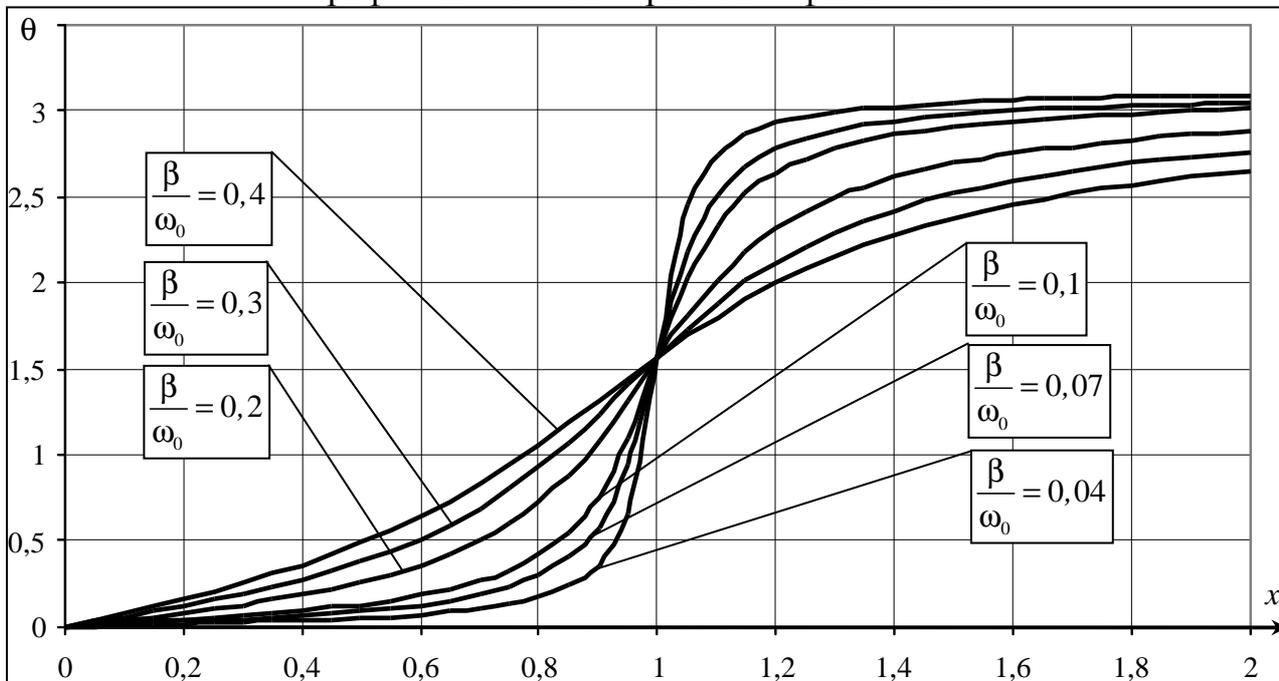


График зависимости разности фаз от частоты



Ширина резонансной кривой $\Delta\Omega_R$ - это интервал частоты, в пределах которого амплитуда колебаний отличается от резонансной амплитуды в пределах $A(\Omega) \geq \frac{A_R}{\sqrt{2}}$. (Т.е. энергии колебаний отличаются не более чем в 2 раза).

Учитывая, что $A_{B_REZ} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}$ и $A_B = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}$,

находим $\frac{A_{B_REZ}}{A_B} = \frac{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}} = \frac{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}$.

Или $\frac{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}} = \sqrt{2}$, $\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2} = 2\sqrt{2}\beta\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$.

Откуда получаем квадратное уравнение $\Omega^4 + (4\beta^2 - 2\omega_0^2)\Omega^2 + (\omega_0^2 - 4\beta^2)^2 = 0$.

Дискриминант этого уравнения $D = 16\beta^2\omega_0^2 - 48\beta^4 = 16\beta^2(\omega_0^2 - 3\beta^2)$.

Корни квадратного уравнения

$$(\Omega^2)_{1,2} = \frac{-(4\beta^2 - 2\omega_0^2) \pm 4\beta\sqrt{(\omega_0^2 - 3\beta^2)}}{2} = -(2\beta^2 - \omega_0^2) \pm 2\beta\sqrt{(\omega_0^2 - 3\beta^2)}.$$

Так как $(\omega_0^2 - 4\beta^2)^2 > 0$, то $(\Omega^2)_{1,2} = \omega_0^2 - 2\beta^2 \pm 2\beta\sqrt{(\omega_0^2 - 3\beta^2)} > 0$.

Откуда находим только положительные решения

$$\Omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2 - 2\beta\sqrt{(\omega_0^2 - 3\beta^2)}} \text{ и } \Omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2 + 2\beta\sqrt{(\omega_0^2 - 3\beta^2)}}.$$

Поэтому для ширины резонансной кривой получаем

$$\Delta\Omega_R = \Omega_2 - \Omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2 + 2\beta\sqrt{(\omega_0^2 - 3\beta^2)}} - \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2 - 2\beta\sqrt{(\omega_0^2 - 3\beta^2)}}.$$

Следовательно, этот параметр определен при $\beta < \frac{\omega_0}{\sqrt{3}}$.

Найдем отношение $\frac{\Omega_{REZ}}{\Delta\Omega_R}$ при малом значении β .

$$\frac{\Omega_{REZ}}{\Delta\Omega_R} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2 + 2\beta\sqrt{(\omega_0^2 - 3\beta^2)}} - \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2 - 2\beta\sqrt{(\omega_0^2 - 3\beta^2)}}},$$

$$\frac{\Omega_{REZ}}{\Delta\Omega_R} = \frac{\Omega_{REZ}}{\sqrt{\Omega_{REZ}^2 + 2\beta\sqrt{(\Omega_{REZ}^2 - \beta^2)}} - \sqrt{\Omega_{REZ}^2 - 2\beta\sqrt{(\Omega_{REZ}^2 - \beta^2)}}} \text{ или } \frac{\Omega_{REZ}}{\Delta\Omega_R} \approx \frac{\Omega_{REZ}}{2\beta}.$$

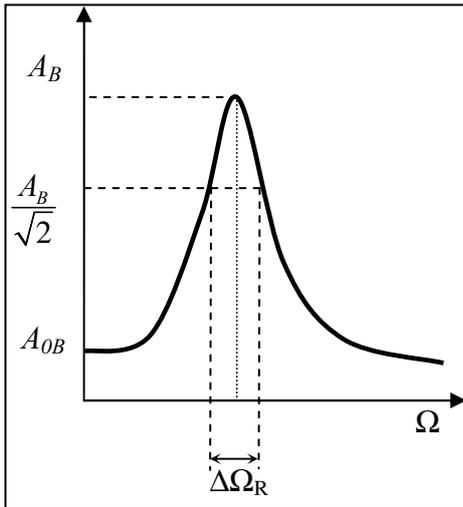
Учтем, что при малых β выполняется $\Omega_{REZ} \approx \omega_0 \approx \omega$, поэтому

$$\frac{\Omega_{REZ}}{\Delta\Omega_R} \approx \frac{\Omega_{REZ}}{2\beta} \approx \frac{\omega}{2\beta} = \frac{2\pi}{2\beta T} = \frac{\pi}{\delta} = Q,$$

где величины ω , δ , Q характеризуют затухающие свободные колебания данной колебательной системы.

Рассмотрим также отношение $\frac{A_{B_REZ}}{A_{0B}} = \frac{1}{2\frac{\beta}{\omega_0}\sqrt{1 - 2\frac{\beta^2}{\omega_0^2}}}$.

Для малого затухания β : $\frac{A_{B_REZ}}{A_0} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = Q$.



Следствия.

1) Для вынужденных колебаний добротность колебательной системы характеризует *резонансные свойства колебательной системы*. Добротность равна отношению резонансной частоты к широте резонансной кривой (при малом затухании). Отсюда следует, что чем выше добротность, тем уже («острее») резонансная кривая $\Delta\Omega_R = \frac{\Omega_{REZ}}{Q}$.

2) Добротность при малом затухании также характеризует отношение амплитуды при резонансе к статическому отклонению системы под действием постоянной силой такой же величины $\frac{A_{B-REZ}}{A_0} \approx Q$.