Кто не сможет на экзамене пояснить смысл этих уравнений, получит «неуд».

$div\vec{D} = \rho$	$\oiint\limits_S \left(\vec{D}, d\vec{S}\right) = q_\Sigma$
$rot\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint\limits_\Gamma \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = -\dfrac{d}{dt}\iint\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right)$
$div\vec{B} = 0$	$\oiint\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = 0$
$rot\vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\oint\limits_\Gamma \left(\vec{H}, d\vec{l}\right) = I_\Sigma + \dfrac{d}{dt}\iint\limits_S \left(\vec{D}, d\vec{S}\right)$

$$\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}, \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{B} = \mu_0 \cdot \left(\vec{H} + \vec{J}\right), \quad div\left(\vec{j}\right) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma, \quad E_{1t} = E_{2t}$$

$$B_{2n} = B_{1n}, \quad H_{2t} - H_{1t} = i$$

Лекции 1-2. **Электрическое поле системы неподвижных зарядов в вакууме. Теорема Гаусса для электростатического поля.**

Электрический заряд. Закон Кулона. Напряжённость электростатического поля. Силовые линии. Принцип суперпозиции и его применение к расчёту поля системы неподвижных зарядов. Работа электростатического поля при перемещении зарядов. Циркуляция вектора напряжённости. Связь напряжённости и потенциала. Поток вектора напряжённости электрического поля. Теорема Гаусса в интегральной и дифференциальной формах в вакууме и её применение для расчёта электростатических полей. Уравнение Пуассона.

Наряду с массой, одним из свойств частиц вещества является электрический заряд. Различают два вида электрического заряда: положительный и отрицательный. Ядро любого атома считается положительно заряженным. Электроны имеют, по определению, отрицательный заряд. О наличии заряда у тела судят по его взаимодействию с другими заряженными частицами. При этом одноименно заряженные тела отталкиваются, разноименно заряженные – притягиваются.

Элементарным зарядом называется абсолютная величина электрического заряда электрона или ядра атома водорода – протона. В СИ величина элементарного заряда равна e=1,6·10^{-19} Кл (единицы измерения – Кулон.) В природе любой электрический заряд кратен элементарному заряду.

Электрические заряды могут появляться или исчезать только попарно. Отсюда следует: закон сохранения электрического заряда – сумма зарядов в замкнутой системе остается постоянной.

В классической теории электромагнитных явлений широко применяется понятие *неподвижного точечного заряда*.

Точечным электрическим зарядом называется заряженное тело, размерами которого (в условиях данной задачи) можно пренебречь. *Можно говорить о точке, имеющей электрический заряд.*

При рассмотрении микроскопических заряженных частиц (~ 10^{-6} м) в качестве точечных зарядов можно применять классическую теорию электромагнетизма только с учётом «усреднения по времени и пространству»: любая микрочастица, находящаяся, например, в газе, постоянно совершает хаотическое (броуновское) движение. Поэтому если необходимо рассматривать положение даже одной электрически заряженной частицы в газе (при отсутствии других микроскопических зарядов и фонового излучения), то приходится рассматривать физические величины, усредненные по времени и пространству.

В масштабах, соизмеримых с размерами атомов (~ 10^{-10} м) методы классической электродинамики, вообще говоря, неприменимы. Однако, в некоторых частных случаях, классическое рассмотрение взаимодействия ядра и электрона с окружающим электромагнитным полем приводит к качественно верным результатам. Это бывает полезно с методологической точки зрения, т.к. как классический подход приводит к менее «трудоёмким» моделям.

Опыт показывает, что взаимодействие точечных зарядов определяется следующим законом (закон Кулона):

Два точечных неподвижных заряда, находящиеся на расстоянии R друг от друга взаимодействуют друг с другом с силой, величина которой пропорциональна произведению величин зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F = k\frac{|q_1 \cdot q_2|}{R^2}.$$

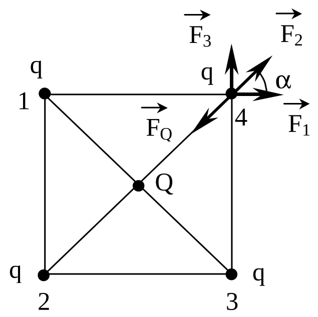
В СИ постоянный коэффициент k (не путайте с постоянной Больцмана!) равен

$k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \approx \dfrac{9\cdot 10^9}{\varepsilon} \quad \dfrac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2}$ для среды с диэлектрической проницаемостью ε.

$k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9\cdot 10^9 \quad \dfrac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2}$ для вакуума ε=1 (ε_0 - диэлектрическая постоянная).

Для силы Кулона справедливо утверждение:

вектор силы, действующей на точечный заряд со стороны остальных зарядов равен векторной сумме сил, действующих со стороны каждого заряда в отдельности $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$. Поэтому, при рассмотрении (статического) взаимодействия макроскопических заряженных тел, необходимо раз-



бить каждое из них на точечные заряды, и затем найти вектор суммарной силы попарных взаимодействий между всеми точками этих тел.

Пример. В вершинах квадрата со стороной *a* находятся одинаковые одноименные заряды, равные q. Какой заряд Q необходимо поместить в центре квадрата, чтобы система находилась в равновесии?

Решение. Рассмотрим силы, действующие на любой из зарядов, например, 4-й. Со стороны зарядов 1, 2, 3 на него действуют силы отталкивания. Величина равнодействующей этих сил (в проекции на диагональное направление) равна

$$F_{РЕЗ} = F_1\cos\alpha + F_3\cos\alpha + F_2 =$$

$$= k\frac{q^2}{a^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + k\frac{q^2}{a^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + k\frac{q^2}{2a^2} = k\frac{q^2}{2a^2}\left(2\sqrt{2}+1\right).$$

Тогда, чтобы заряд находился в равновесии, он должен притягиваться к **противоположному** по знаку заряду с силой

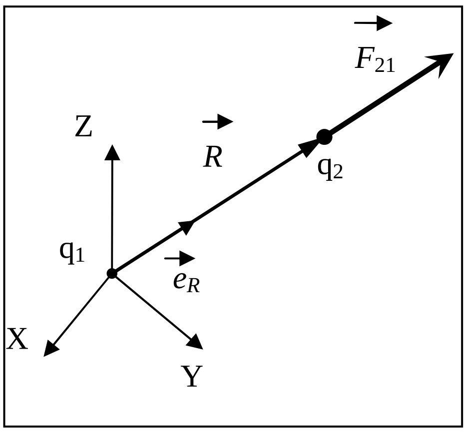
$$F_Q = k\frac{|q||Q|}{a^2/2} = k\frac{q^2}{2a^2}\left(2\sqrt{2}+1\right). \text{ Отсюда } |Q| = |q|\frac{\left(2\sqrt{2}+1\right)}{4}. ♣$$

Сила Кулона является консервативной (для данных двух зарядов она зависит только от расстояния между ними), следовательно, для нее можно ввести потенциальную энергию $W_{ПОТ}$.

Утверждение. Энергия взаимодействия двух точечных неподвижных зарядов определяется соотношением

$$\boxed{W = k\frac{q_1\cdot q_2}{R} + C}.$$

(Обратите внимание на показатель степени в знаменателе и отсутствие модуля зарядов.).



Доказательство. Консервативная сила и соответствующая ей потенциальная энергия должны быть связаны соотношением

$$\vec{F} = -grad\left(W_{ПОТ}\right).$$

Рассмотрим систему отсчёта, в которой один из зарядов (q_1) покоится в начале координат, а второй (q_2) находится в точке, задаваемой радиус-вектором $\vec{R} = (x, y, z)$. Пусть заряды будут одноименными. Тогда вектор силы Кулона, действующий на второй заряд со стороны первого

$$\vec{F}_{21} = k\frac{q_1 q_2}{R^2}\vec{e}_R,$$

где $\vec{e}_R = \dfrac{\vec{R}}{R} = \left(\dfrac{x}{R}, \dfrac{y}{R}, \dfrac{z}{R}\right)$ - единичный вектор направления для радиус-вектора.

Найдем выражение для градиента от потенциальной энергии

$$grad\left(\mathrm{W}_{\text{ПОТ}}\right)=\left(\frac{\partial \mathrm{W}_{\text{ПОТ}}}{\partial x},\frac{\partial \mathrm{W}_{\text{ПОТ}}}{\partial y},\frac{\partial \mathrm{W}_{\text{ПОТ}}}{\partial z}\right).$$

Так как C=const, а $R=\left|\vec{R}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, то, например,

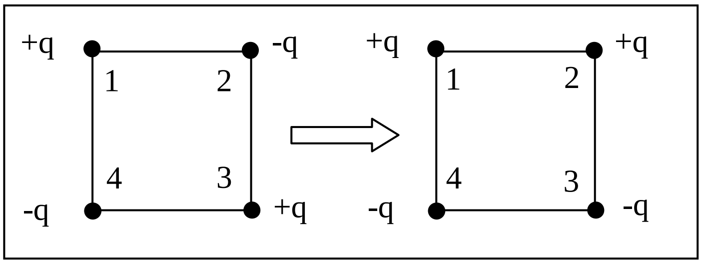
$$\frac{\partial \mathrm{W}_{\text{ПОТ}}}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{q_1q_2}{R}+C\right)=kq_1q_2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=-kq_1q_2\frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=-k\frac{q_1q_2}{R^2}\cdot\frac{x}{R}.$$

Аналогично, $\dfrac{\partial \mathrm{W}_{\text{ПОТ}}}{\partial y}=-k\dfrac{q_1q_2}{R^2}\cdot\dfrac{y}{R}$, $\dfrac{\partial \mathrm{W}_{\text{ПОТ}}}{\partial z}=-k\dfrac{q_1q_2}{R^2}\cdot\dfrac{z}{R}$.

Поэтому

$$grad\left(\mathrm{W}_{\text{ПОТ}}\right)=\left(-k\frac{q_1q_2}{R^2}\cdot\frac{x}{R},-k\frac{q_1q_2}{R^2}\cdot\frac{y}{R},-k\frac{q_1q_2}{R^2}\cdot\frac{z}{R}\right)=-k\frac{q_1q_2}{R^2}\left(\frac{x}{R},\frac{y}{R},\frac{z}{R}\right)=-k\frac{q_1q_2}{R^2}\vec{e}_R=-\vec{F}\ .♣$$

Пример. Какую работу необходимо совершить, чтобы перестроить систему четырех точечных зарядов, расположенных в вершинах квадрата со стороной *a*? Заряд q считать известным (см. рис.).



Решение. Работа сил поля равна изменению потенциальной энергии системы зарядов:

$$\mathrm{A}_{\text{ПОЛЯ}}=\mathrm{W}_{\text{ПОТ\_НАЧ}}-\mathrm{W}_{\text{ПОТ\_КОН}}.$$

Начальная энергия системы равна сумме энергий ПОПАРНЫХ взаимодействия между ВСЕМИ зарядами: 1 и 2: $\mathrm{W}_{12}=\mathrm{k}\dfrac{\mathrm{q}\cdot(\text{-q})}{a}$, 1 и 3: $\mathrm{W}_{13}=\mathrm{k}\dfrac{\mathrm{qq}}{\sqrt{2}a}$, 1 и 4: $\mathrm{W}_{14}=\mathrm{k}\dfrac{\mathrm{q}\cdot(\text{-q})}{a}$, 2 и 3: $\mathrm{W}_{23}=\mathrm{k}\dfrac{\mathrm{q}\cdot(\text{-q})}{a}$, 2 и 4: $\mathrm{W}_{24}=\mathrm{k}\dfrac{(\text{-q})(\text{-q})}{\sqrt{2}a}$, 3 и 4: $\mathrm{W}_{34}=\mathrm{k}\dfrac{\mathrm{q}\cdot(\text{-q})}{a}$.

В итоге, начальная энергия системы зарядов равна: $\mathrm{W}_{\text{ПОТ\_НАЧ}}=\mathrm{W}_{12}+\mathrm{W}_{13}+\mathrm{W}_{14}+\mathrm{W}_{23}+\mathrm{W}_{24}+\mathrm{W}_{34}$,

$$\mathrm{W}_{\text{ПОТ\_НАЧ}}=\mathrm{k}\frac{\mathrm{q}(\text{-q})}{a}+\mathrm{k}\frac{\mathrm{qq}}{a\sqrt{2}}+\mathrm{k}\frac{\mathrm{q}(\text{-q})}{a}+\mathrm{k}\frac{\mathrm{q}(\text{-q})}{a}+\mathrm{k}\frac{(\text{-q})(\text{-q})}{a\sqrt{2}}+\mathrm{k}\frac{\mathrm{q}(\text{-q})}{a}=\text{-4k}\frac{\mathrm{q}^2}{a}+2\mathrm{k}\frac{\mathrm{q}^2}{a\sqrt{2}}.$$

Аналогично подсчитываем конечную энергию системы зарядов:

$$\mathrm{W}_{\text{ПОТ\_КОН}}=\mathrm{k}\frac{\mathrm{qq}}{a}-\mathrm{k}\frac{\mathrm{qq}}{a\sqrt{2}}-\mathrm{k}\frac{\mathrm{qq}}{a}-\mathrm{k}\frac{\mathrm{qq}}{a}-\mathrm{k}\frac{\mathrm{qq}}{a\sqrt{2}}+\mathrm{k}\frac{\mathrm{qq}}{a}=\text{-2k}\frac{\mathrm{q}^2}{a\sqrt{2}}.$$

Поэтому искомая работа равна:

$$\mathrm{A}_{\text{ПОЛЯ}}=\mathrm{W}_{\text{ПОТ\_НАЧ}}-\mathrm{W}_{\text{ПОТ\_КОН}}=2\mathrm{k}\frac{\mathrm{q}^2}{a\sqrt{2}}-\left(\text{-4k}\frac{\mathrm{q}^2}{a}+2\mathrm{k}\frac{\mathrm{q}^2}{a\sqrt{2}}\right)=4\mathrm{k}\frac{\mathrm{q}^2}{a\sqrt{2}}-4\mathrm{k}\frac{\mathrm{q}^2}{a}=\text{-k}\frac{\mathrm{q}^2}{a}\left(4-2\sqrt{2}\right).$$

Работа сил поля равна $\mathrm{A}_{\text{ПОЛЯ}}=-\mathrm{A}_{\text{ВНЕШ}}$, поэтому $\mathrm{A}_{\text{ВНЕШ}}=\mathrm{k}\dfrac{\mathrm{q}^2}{a}\left(4-2\sqrt{2}\right)$.♣

<u>Замечание</u>. Сравним по интенсивности электрическое и гравитационное взаимодействие двух точечных одинаковых заряженных элементарных частиц

$$\frac{F_K}{F_G}=\frac{\left(k\dfrac{q^2}{R^2}\right)}{\left(G\dfrac{m^2}{R^2}\right)}=\frac{k}{G}\frac{q^2}{m^2}\approx\frac{9\cdot 10^9}{6{,}67\cdot 10^{-11}}\left(\frac{q}{m}\right)^2\approx 1{,}35\cdot 10^{20}\left(\frac{q}{m}\right)^2$$

Например, для электрона $\frac{q}{m}\approx 1{,}76\cdot 10^{11}$ Кл/кг, поэтому $\frac{F_K}{F_G}\approx 4\cdot 10^{42}$,

для протона $\frac{q}{m}\approx 10^8$ Кл/кг, следовательно $\frac{F_K}{F_G}\approx 1{,}35\cdot 10^{36}$.

Таким образом, можно сказать, что электрическое взаимодействие намного интенсивнее, чем гравитационное. Однако, при рассмотрении макроскопических систем оказывается, что электрические заряды компенсируют друг друга и роль электрических сил становится незначительной. Поэтому на больших (космических) масштабах решающую роль играют гравитационные силы.

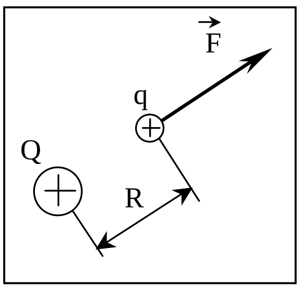
ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ.

По современным представлениям электрические заряды взаимодействуют посредством некоторой материальной субстанции, которая называется *электрическое поле* и является одной из форм проявления *электромагнитного* поля.

Электрическое поле в данной точке пространства характеризуется потенциалом и напряженностью.

НАПРЯЖЕННОСТЬ ПОЛЯ

Электрическое поле характеризуется силовой характеристикой - вектором напряженности, который определяется как отношение вектора силы, действующей на точечный заряд q, помещенный в данную точку поля, к величине этого заряда $\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q}$. Величина напряженности измеряется Н/Кл или В/м (Вольт на метр). Зная напряженность поля в данной точке можно найти силу, действующую на заряд $\vec{F}=q\vec{E}$. Отсюда видно, что на положительно заряженные частицы (q>0) сила действует по направлению вектора напряженности электрического поля ($\vec{F}\uparrow\uparrow\vec{E}$), а на отрицательно заряженные (q<0) - против ($\vec{F}\uparrow\downarrow\vec{E}$).

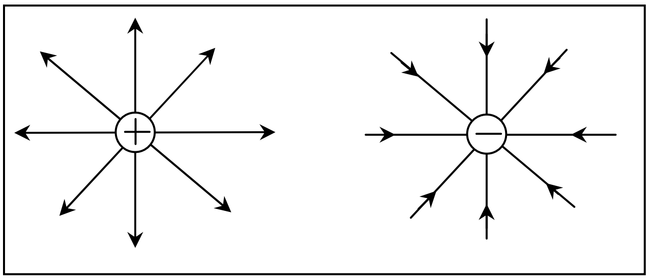


Правило: чтобы найти направление вектора напряженности электрического поля в данной точке, надо (мысленно) поместить в эту точку *положительный* заряд. Тогда вектор напряженности будет направлен так же как и вектор силы, действующей на заряд.

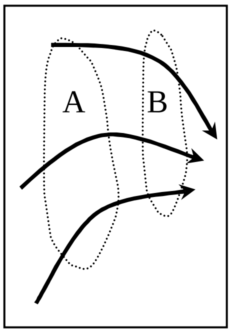
Найдем напряженность поля создаваемого точечным зарядом Q на расстоянии R от него. Для этого возьмем положительный заряд q и поместим его на расстоянии R от заряда Q. Тогда эти заряды будут взаимодействовать с силой, величина которой: $F = k\frac{q|Q|}{R^2}$. Поэтому величина напряженности:

$$E = \frac{F}{q} = k\frac{|Q|}{R^2}.$$

Вектор напряженности направлен в данном случае, так же как и вектор силы (мы делим вектор силы F на положительное число q!). То есть вектор напряженности поля, создаваемого положительным зарядом, направлен от него, а у отрицательного – к нему.



Силовой линией электрического поля называется линия в пространстве, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора $\vec{E}$. Таким образом, силовые линии электрического поля направлены от положительного заряда к отрицательному.



Замечание. Из рисунка (для точечного заряда) видно, что силовые линии расположены гуще вблизи заряда, т.е. там, где величина напряженности поля выше. Это относительное возрастание густоты силовых линий используют для условного обозначения областей с большей напряженностью поля. Например, на рисунке (слева) в области B напряженность поля больше, чем в области A.

УРАВНЕНИЕ СИЛОВОЙ ЛИНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ.

По определению, касательный вектор к линии лежит на одной прямой с вектором напряжённости в точке пространства, через которую проходит силовая линия, т.е. эти векторы пропорциональны друг другу.

Пусть τ - параметр задающий линию в трехмерном пространстве, а кривая задаётся координатами $\left(x(\tau), y(\tau), z(\tau)\right)$, тогда касательный вектор к этой кривой определяется как $\left(\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}\right)$. Поэтому $\left(\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}\right) = A \cdot \vec{E}$, где A – некоторый коэффициент пропорциональности. Исключая параметр τ получаем «каноническую» форму записи уравнения силовой линии

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}.$$

ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ ДЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ.

Вектор напряженности поля, создаваемого системой зарядов, равен векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым из зарядов в отдельности: $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$.

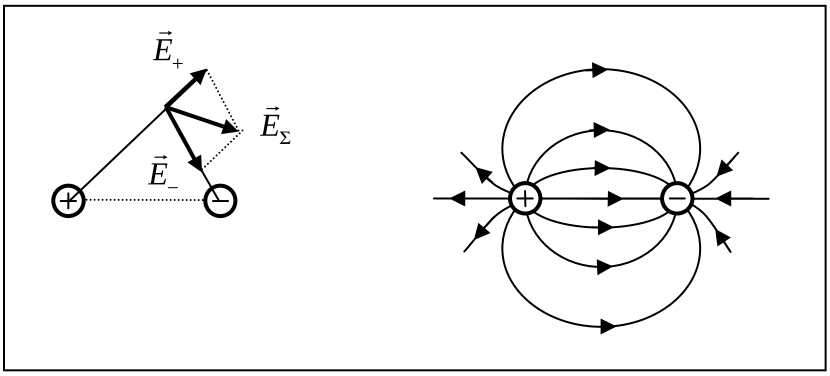
Это следует из того, что силы складываются как векторы: $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$, поэтому

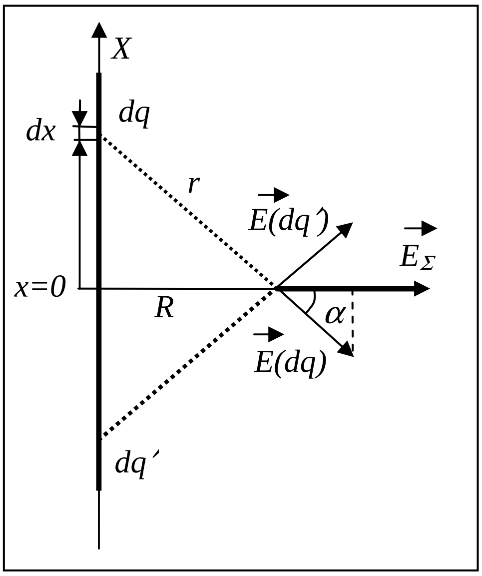
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{\sum_i \vec{F}_i}{q} = \sum_i \frac{\vec{F}_i}{q} = \sum_i \vec{E}_i .$$

Примеры на принцип суперпозиции.

1) Рассмотрим систему из двух одинаковых точечных зарядов.

Напряжённость поля, создаваемого зарядами, равна векторной сумме напряжённостей полей каждого из зарядов $\vec{E}_\Sigma = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$. Тогда получаем картину силовых линий.





2) Найдем напряженность поля, создаваемого бесконечной прямой равномерно заряженной тонкой нитью. Пусть $\lambda > 0$ - линейная плотность заряда нити (это означает, что кусок длиной L имеет заряд $q = \lambda \cdot L$). Будем искать напряженность в точке, расположенной от нити на расстоянии R. Вдоль нити вводим ось X, начало которой является основанием перпендикуляра, опущенного из рассматриваемой точки на нить. На некотором расстоянии от начала выделяем малый участок нити длиной dx, тогда заряд этого куска $dq = \lambda \cdot dx$. Рассматривая этот кусок как точечный заряд dq, находим создаваемый им вектор напряженности в рассматриваемой точке $\vec{E}_{dq}$. Симметричный (относительно начала оси X) точечный заряд dq' создает симметричный вектор напряженности $\vec{E}_{dq'}$. Их векторная сумма $\vec{E}_\Sigma = \vec{E}_{dq} + \vec{E}_{dq'}$ лежит на перпендикуляре к нити. Таким образом, общий вектор напряженности тоже должен быть направлен перпендикулярно нити. Следовательно, при суммировании векторов напряжённостей от всех точечных зарядов

на нити можно учитывать только их перпендикулярную составляющую, т.е. найти сумму проекций на перпендикулярное направление: $E=\sum_{dq} E_{dq}\cdot cos\,\alpha$. Так как $E_{dq}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}$, $cos\,\alpha=\frac{R}{r}$,

$r=\sqrt{R^2+x^2}$, то переходим к интегралу $E=\int\limits_{НИТЬ}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\frac{R}{r}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{R}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

Интегрируем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{R^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{R^2dx}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{R^2}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(R^2+x^2\right)dx}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right]=\frac{1}{R^2}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

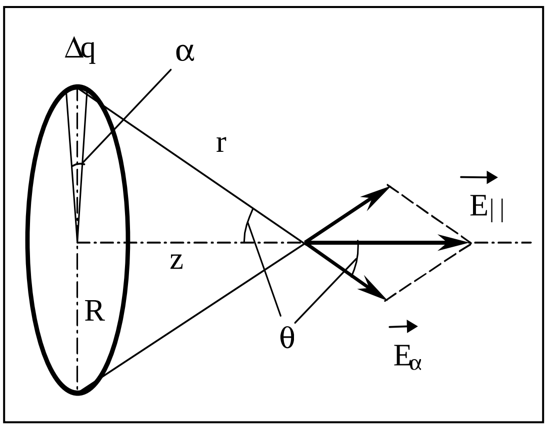
Берём второй интеграл по частям $\int udv=uv-\int vdu$:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\begin{bmatrix}dv=\frac{xdx}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx, v=-\frac{1}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}\\ u=x, du=dx\end{bmatrix}=-\frac{x}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}=-2+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Откуда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{R^2}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}+2-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]=\frac{2}{R^2}$.

Окончательно: $E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$.

3) Найдем напряженность поля на оси равномерно заряженного кольца, радиус которого *R*, а заряд Q>*0*. Разобьем кольцо на большое количество участков, опирающихся на центральный угол $\alpha=\frac{2\pi}{N}$. (Длина одного участка $L=\frac{2\pi R}{N}$.) Заряд одного участка $q=\frac{Q}{N}$. Принимая малый участок кольца за точечный заряд можно найти напряженность поля на оси кольца, создаваемую одним



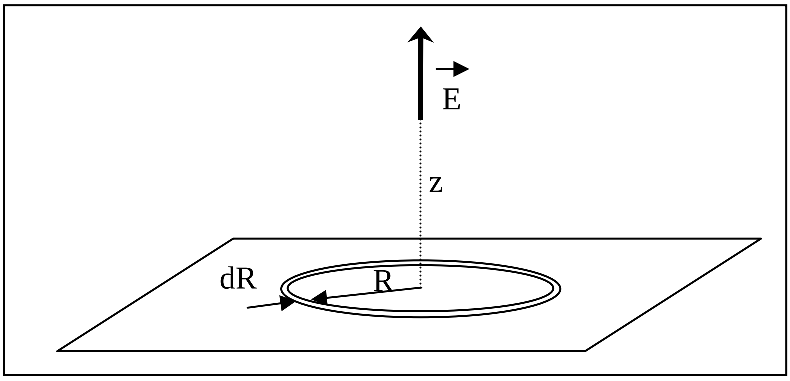
участком: $E_\alpha=k\frac{q}{r^2}$, где $r=\sqrt{R^2+z^2}$ - расстояние от заряда до рассматриваемой точки. При этом участок, расположенный симметрично относительно центра кольца, создает вектор напряженности, симметричный уже найденному. Их сумма будет лежать на оси кольца (вектор $\vec{E}_{||}$). Поэтому при суммировании всех векторов напряженностей от каждого из участков будем учитывать только составляющую вектора, параллельную оси кольца, длина которой $E_\alpha\cos\theta$, где

$\cos\theta=\frac{z}{r}=\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$. В итоге получаем,

$$E = \sum E_\alpha \cos\theta = Nk\frac{q}{r^2}\cdot\frac{z}{r} = Nk\frac{Q/N}{R^2+z^2}\cdot\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} = k\frac{Qz}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}.$$

Отметим, что в центре кольца (z=0) напряженность поля равна нулю.♣

4) Рассмотрим бесконечную равномерно заряженную плоскость. Пусть поверхностная плотность заряда равна σ>0. В силу симметрии вектор напряженности направлен перпендикулярно плоско-



сти. Ищем напряжённость в точке, находящейся на расстоянии z от плоскости.

Если плоскость представить как набор тонких, вложенных друг в друга соосных колец, ось которых проходит через искомую точку, то можно воспользоваться результатом предыдущего примера.

Заряд тонкого кольца, радиус которого R и толщина dR равен $dq=\sigma\cdot dS=\sigma\cdot 2\pi R dR$.

Тогда искомая напряжённость $E=\sum_{dq} k\frac{z\cdot dq}{\left(R^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$. Переходя к интегрированию, получаем

$$E = \int_{\text{плоскость}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z\cdot\sigma\cdot dS}{\left(R^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^\infty \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z\cdot\sigma\cdot 2\pi R dR}{\left(R^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z\cdot\sigma}{4\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{d\left(R^2+z^2\right)}{\left(R^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z\cdot\sigma}{4\varepsilon_0}\left(-\frac{2}{\left(R^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)\Bigg|_0^\infty = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Величина напряженности поля заряженной пластины $E=\frac{q}{2\varepsilon_0 S}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$,

где $\sigma=\frac{q}{S}$ - поверхностная плотность заряда (Кл/м^2).♣

Электрическое поле называется однородным, если вектор напряженности в каждой точке поля одинаковый (по величине и по направлению). Следовательно, *поле бесконечной заряженной пластины- однородное.*

ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Потенциал электрического поля в данной точке поля – это отношение энергии взаимодействия точечного заряда с полем W к величине этого заряда q (энергетическая характеристика электрического поля) $\varphi = \dfrac{W}{q}$. Единица измерения потенциала Вольт (В). 1 В =1 Дж/ 1 Кл.

Работа, совершаемая силами консервативного поля, при относительном изменении положения двух зарядов равна уменьшение потенциальной энергии системы зарядов:

$$A = W_{ПОТ\_НАЧ} - W_{ПОТ\_КОН} = q\varphi_{НАЧ} - q\varphi_{КОН}$$

Тогда, с учетом определения потенциала работу сил поля по перемещению заряда q можно записать в виде $\mathrm{A} = \mathrm{q}\left(\varphi_{\mathrm{НАЧ}} - \varphi_{\mathrm{КОН}}\right)$.

$$\mathrm{A} = \mathrm{W}_{\mathrm{ПОТ\_НАЧ}} - \mathrm{W}_{\mathrm{ПОТ\_КОН}} = \mathrm{k}\frac{\mathrm{q}_1 \cdot \mathrm{q}_2}{\mathrm{R}_{\mathrm{НАЧ}}} - \mathrm{k}\frac{\mathrm{q}_1 \cdot \mathrm{q}_2}{\mathrm{R}_{\mathrm{КОН}}}.$$

Т.о. *разность потенциалов между двумя точками поля – это отношение работы сил поля (кулоновских сил) по переносу заряда между этими точками к величине этого заряда*

$$\varphi_{\mathrm{НАЧ}} - \varphi_{\mathrm{КОН}} = \frac{\mathrm{A}_{\mathrm{КУЛ}}}{\mathrm{q}}.$$

Следовательно, если определить на бесконечности $\varphi_\infty = 0$, потенциал данной точки поля можно определить как отношение работы сил поля по перемещению заряда q на очень большое расстояние из данной точки к величине этого заряда $\varphi_{\mathrm{НАЧ}} = \dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{q}} + \varphi_\infty = \dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{q}}$.

Если поле создается точечным зарядом Q, то на расстоянии R от него потенциал определяется по формуле (C=0) $\varphi = \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{q}} = \mathrm{k}\dfrac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}}$.

Поверхности в пространстве, на которых потенциал остается постоянным, называются *эквипотенциальными поверхностями*.

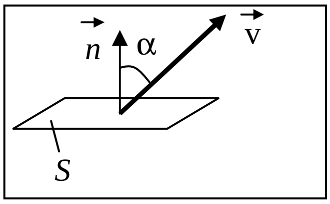
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОТСТУПЛЕНИЕ

Будем предполагать, что в некоторой области пространства задано непрерывно-дифференцируемое векторное поле $\vec{v}(x,y,z)$.

1) Поток векторного поля через поверхность.

Потоком вектора $\vec{v}$ через некоторую поверхность называется величина $\Phi_v = \iint\limits_S \left(\vec{v}, d\vec{S}\right)$.

В простейшем случае плоской поверхности S и однородного векторного поля поток определяется как



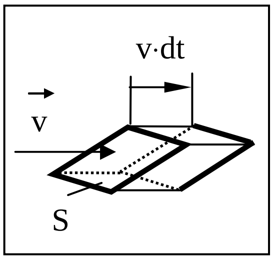
$$\Phi_v = v\cdot S\cos\alpha,$$

где α - угол между вектором $\vec{v}$ и нормалью $\vec{n}$ к площадке *S*.

Если поверхность *S* не является плоской, то она разбивается на элементарные участки величиной *dS*, такие, что каждый из них можно рассматривать как малую часть плоскости, а поле вблизи площадки – однородным. Затем для каждого из участков ищется соответствующая величина $\delta\Phi_v = v\cdot dS\cos\alpha$, а потом производится суммирование по всей поверхности $\Phi_v = \sum_S \delta\Phi_v$.

Если ввести вектор, перпендикулярный к каждой площадке: $d\vec{S} = \vec{n}\cdot dS$, где $\vec{n}$ - единичная нормаль к площадке *dS*, то величину потока записать можно в виде $\delta\Phi_v = v\cdot dS\cos\alpha = \left(\vec{v}, d\vec{S}\right)$.

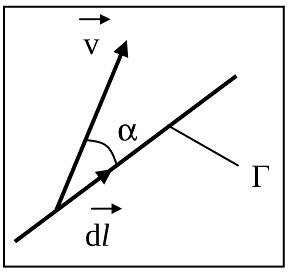
Тогда поток через всю поверхность $\Phi_v = \sum_S \delta\Phi_v = \iint_S \left(\vec{v}, d\vec{S}\right)$.



Пример. Найдем объем жидкости протекающей через некоторую малую наклонную площадку за единицу времени.

Пусть скорость жидкости равна v и в пределах площадки её можно считать постоянной, тогда объём жидкости, пошедшей через площадку за малый промежуток времени *dt* заполнит внутренность косого параллелепипеда, объём которого равен $S\cos\alpha\cdot vdt$. Здесь α - угол отклонения вектора скорости жидкости $\vec{v}$ от направления, перпендикулярного площадке - т.е. угол между вектором единичной нормали к площадке и вектором скорости жидкости. Если ввести вектор $\vec{S} = S\cdot\vec{n}$, то объёмный расход жидкости, т.е. объём жидкости, протекающей через площадку в единицу времени, определяется соотношением $Q = vS\cos\alpha = \left(\vec{v}, \vec{S}\right)$.♣

2) Интеграл от векторного поля вдоль кривой линии Г («гамма»): $\int_\Gamma \left(\vec{v}, d\vec{l}\right)$, где $d\vec{l}$ - касательный вектор к каждой точке кривой. Таким образом, кривая является ориентированной – она имеет начальную и конечную точки (так как задано направление вдоль кривой с помощью вектора $d\vec{l}$).



В случае, когда векторное поле однородное, а кривая – отрезок прямой линии длиной *L*, интеграл равен

$$\int_\Gamma \left(\vec{v}, d\vec{l}\right) = v\cdot L\cos\alpha$$

где α - угол между векторами поля и касательным вектором.

В случае если кривая линия не является прямой и векторное поле не постоянное, нужно разбить линию на малые почти прямолинейные участки длиной dl, такие, что на каждом из участков поле можно рассматривать как однородное. Для каждого участка найти величину $v\cdot dl\cos\alpha=\left(\vec{v},d\vec{l}\right)$, а затем просуммировать полученные все выражения

$$\sum_{Кривая} v\cdot dl\cos\alpha=\int_{\Gamma}\left(\vec{v},d\vec{l}\right).$$

Пусть кривая линия является замкнутой (без самопересечений во внутренних точках). Такую линию будем в дальнейшем называть контуром. Интеграл от векторного поля $\vec{v}$ по замкнутой кривой Г: $\oint_{\Gamma}\left(\vec{v},d\vec{l}\right)$ называется *циркуляцией* этого векторного поля вдоль контура Г (кружок в знаке интеграла условно обозначает, что кривая - замкнутая).

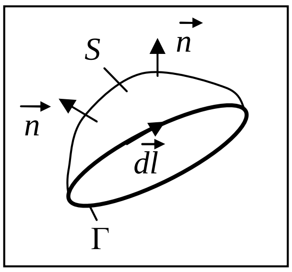
3) Теорема Стокса.

Если рассмотреть незамкнутую поверхность *S*, то край этой поверхности будет являться замкнутой кривой. Будем считать, что поверхность является ориентируемой (т.е. она – двусторонняя). (Односторонней поверхностью является, например, лента Мёбиуса – поэтому она не ориентируемая). Если Г – кривая, являющаяся краем поверхности S, то можно рассмотреть циркуляцию векторного поля вдоль края Г: $\oint_{\Gamma}\left(\vec{v},d\vec{l}\right)$.

Векторному полю $\vec{v}$ можно сопоставить ещё одно векторное поле $rot\left(\vec{v}\right)$, которое называется *ротором* векторного поля $\vec{v}$. В декартовой системе координат оно определяется соотношением

$$rot\left(\vec{v}\right)=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ v_x & v_y & v_z\end{vmatrix}=\vec{e}_x\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)+\vec{e}_y\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)+\vec{e}_z\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

где $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ - орты декартовой системы координат.



Теорема Стокса гласит: $\oint_{\Gamma}\left(\vec{v},d\vec{l}\right)=\iint_{S}\left(rot\left(\vec{v}\right),d\vec{S}\right)$.

Циркуляция векторного поля вдоль края ориентируемой поверхности равна потоку ротора этого поля через эту поверхность. Направление касательного вектора $d\vec{l}$ к краю Г выбирается так чтобы поверхность оставалась слева при обходе, а нормаль направлена наружу (правый винт).

<u>Смысл ротора можно прояснить следующим примером</u>. Рассмотрим диск, вращающийся вокруг оси симметрии с угловой скоростью ω. Скорость любой точки определяется расстоянием до оси вращения $v=R\cdot\omega$. Вектор скорости любой точки направлен по касательной к её траектории – окружности с центром на оси вращения. Можно сказать, что на диске задано векторное поле

– поле векторов скоростей всех точек $\vec{v}$. Найдем ротор этого поля $rot(\vec{v})$. Воспользуемся теоремой Стокса

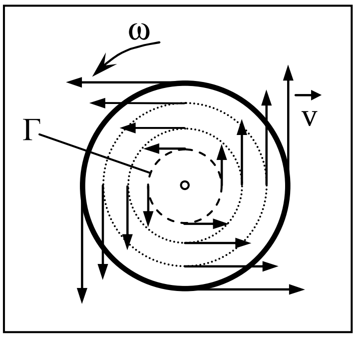
$$\oint_{\Gamma}(\vec{v},d\vec{l})=\iint_{S}(rot(\vec{v}),d\vec{S}).$$

Если взять малую площадку *S*, то по теореме о среднем для интеграла можно приближенно записать

$$\oint_{\Gamma}(\vec{v},d\vec{l})=\iint_{S}(rot(\vec{v}),d\vec{S})=\iint_{S}(rot(\vec{v}),\vec{n})dS=\iint_{S}(rot(\vec{v}))_n dS\approx(rot(\vec{v}))_n\cdot S,$$

где $(rot(\vec{v}))_n$ - проекция ротора на нормаль к площадке *S*.

В качестве контура Г возьмём окружность малого радиуса *R* с центром на оси вращения.



Длина этой окружности $2\pi R$, она охватывает площадку *S*, площадь которой πR^2. В каждой точке этой окружности вектор скорости направлен по касательной к ней, поэтому угол между малым касательным вектором $d\vec{l}$ и вектором скорости $\vec{v}$ равен нулю. Следовательно $(\vec{v},d\vec{l})=v\cdot dl$.

На выбранной окружности Г величина скорости не меняется $v=R\cdot\omega=const$. Тогда

$$\oint_{\Gamma}(\vec{v},d\vec{l})=\oint_{\Gamma}v\cdot dl=\omega R\oint_{\Gamma}dl.$$

Интеграл $\oint_{\Gamma}dl=2\pi R$ равен длине окружности Г, поэтому циркуляция $\oint_{\Gamma}v\cdot dl=2\pi\omega R^2$.

Откуда $2\pi\omega R^2\approx(rot(\vec{v}))_n\pi R^2$.

После сокращений устремим радиус окружности R к нулю, и получим проекцию ротора на ось вращения

$$(rot(\vec{v}))_n=2\omega.$$

Т.е. ротор векторного равен удвоенной угловой скорости вращения точек области, где задано векторное поле. Поэтому иногда ротор также называют *вихрем* поля. Поля, для которых ротор отличен от нуля называют *вихревыми* или *соленоидальными*. Оказывается, для любого вихревого поля $\vec{v}$ существует некоторое векторное поле $\vec{a}$, такое, что выполняется равенство

$$\vec{v}=rot(\vec{a}).$$

4) Потенциальное поле. Векторное поле $\vec{v}$, для которого существует непрерывно-дифференцируемая функция Ф, такая, что в некоторой области выполняется равенство

$$\vec{v}=grad\Phi$$

называется *потенциальным в этой области.*

Ротор потенциального поля равен нулевому вектору $rot\left(grad\Phi\right)=\vec{0}$.

Действительно, т.к. $grad\Phi=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x},\frac{\partial\Phi}{\partial y},\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$, то

$$rot\left(\vec{v}\right)=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial\Phi}{\partial x} & \frac{\partial\Phi}{\partial y} & \frac{\partial\Phi}{\partial z}\end{vmatrix}=\vec{e}_x\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial y}\right)+\vec{e}_y\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}\right)+\vec{e}_z\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x}\right)=\vec{0}.$$

5) Теорема Остроградского-Гаусса.

Любому непрерывно-дифференцируемому векторному полю $\vec{v}$ соответствует функция, называемая *дивергенцией* этого векторного поля

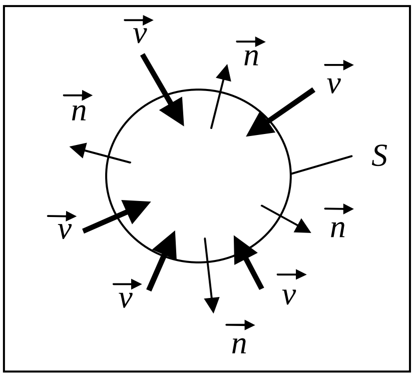
$$div\left(\vec{v}\right)=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Теорема Остроградского-Гаусса: *поток векторного поля через замкнутую поверхность, ориентированную наружу, равен интегралу от дивергенции этого поля по объёму, охваченному этой поверхностью*

$$\oiint\limits_S\left(\vec{v},d\vec{S}\right)=\iiint\limits_V div\left(\vec{v}\right)dV$$

Смысл дивергенции. Рассмотрим выпуклую поверхность, охватывающую достаточно малый объём. Тогда по теореме о среднем для интеграла

$$\oiint\limits_S\left(\vec{v},d\vec{S}\right)=\iiint\limits_V div\left(\vec{v}\right)dV\approx div\left(\vec{v}\right)\cdot V$$

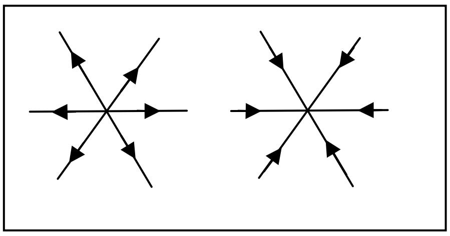


Предположим, что векторное поле «втекает» внутрь объёма V, т.е. в каждой точке поверхности *S* векторы $\vec{v}$ направлены против векторов нормалей $\vec{n}$. Поэтому в каждой точке скалярное произведение $\left(\vec{v},d\vec{S}\right)=\left(\vec{v},\vec{n}\right)dS<0$ отрицательно.

Тогда интеграл $\oiint\limits_S\left(\vec{v},d\vec{S}\right)<0$. Так как величина объёма V>0, то

$$div\left(\vec{v}\right)\approx\frac{\oiint\limits_S\left(\vec{v},d\vec{S}\right)}{V}<0.$$

Говорят, что в этом случае поле имеет внутри поверхности S «сток» - «оно как бы стекает в некоторую дырку». Если же $div\left(\vec{v}\right)>0$, то говорят, что у поля есть «источник».



Можно заметить, что в случае *стока* или *источника* поля, при стягивании поверхности S в точку, векторное поле становится похожим на картину силовых точечных зарядов.

В этом случае положительные заряды являются *источниками* электрического поля и для них $div\vec{E} > 0$.

Отрицательные заряды являются *стоками* электрического поля. Для них $div\vec{E} < 0$.

Электрические заряды принято называть просто *источниками* (положительными и отрицательными) электрического поля.

Таким образом, силовые линии электрического поля не являются непрерывными линиями – они имеют начало и конец.

Вихревое электрическое поле $\vec{v}$ не имеет источников. Действительно, в случае вихревого поля $\vec{v}$ существует некоторое поле $\vec{a}$, такое, что $\vec{v} = rot(\vec{a})$, поэтому

$$div(\vec{v}) = div(rot(\vec{a})) = \frac{\partial (rot(\vec{a}))_x}{\partial x} + \frac{\partial (rot(\vec{a}))_y}{\partial y} + \frac{\partial (rot(\vec{a}))_z}{\partial z}$$

Но

$$rot(\vec{a}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right)$$

поэтому

$$div(\vec{v}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) =$$

$$= \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial z \partial y} = 0$$

Так как вихревое поле не имеет источников, то его силовые линии нигде не разрываются, т.е. они *непрерывные и замкнутые*.

СВЯЗЬ НАПРЯЖЕННОСТИ И ПОТЕНЦИАЛА.

Так как энергия взаимодействия точечного заряда с электрическим полем и сила, действующая на этот заряд со стороны поля, связаны соотношением $\vec{F} = -grad(\mathrm{W_{ПОТ}})$, то из определений получаем $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = -\frac{1}{q} grad(\mathrm{W_{ПОТ}}) = -grad\left(\frac{\mathrm{W_{ПОТ}}}{q}\right) = -grad(\varphi)$.

Таким образом, связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля дается выражением (в дифференциальной форме)

$$\vec{E} = -grad(\varphi).$$

<u>Следовательно, электростатическое поле является потенциальным полем</u>.

Силовые линии направлены перпендикулярно эквипотенциальным поверхностям в каждой их точке. Действительно, рассмотрим малое перемещение на вектор $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ вдоль эквипотенциальной поверхности $\varphi(x, y, z) = const$. Для вектора напряженности в любой точке этой поверхности справедливо равенство $(\vec{E}, d\vec{r}) = -(grad(\varphi), d\vec{r}) = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz\right) = -d\varphi = 0$.

Следовательно, в любой точке вектор напряженности направлен перпендикулярно к эквипотенциальной поверхности.

Из свойств градиента следует, что вектор напряжённости электрического поля направлен в сторону наибольшего убывания потенциала, перпендикулярно эквипотенциальной поверхности.

Работа сил электрического поля

$$A_{КУЛ} = \int_{НАЧ}^{КОНЕЦ} (\vec{F}_{КУЛ}, d\vec{l}) = \int_{НАЧ}^{КОНЕЦ} (q \cdot \vec{E}, d\vec{l}) = q \cdot \int_{НАЧ}^{КОНЕЦ} (\vec{E}, d\vec{l}).$$

В то же время $A_{КУЛ} = q(\varphi_{НАЧ} - \varphi_{КОН})$.

Сравниваем эти выражения и получаем

$$\varphi_{НАЧ} - \varphi_{КОН} = \int_{НАЧ}^{КОНЕЦ} (\vec{E}, d\vec{l}).$$

Если обозначить изменение потенциала как $\Delta\varphi = \varphi_{КОН} - \varphi_{НАЧ}$ (НЕ ПУТАЙТЕ С ОПЕРАТОРОМ ЛАПЛАСА!), то получим связь напряженности и потенциала в интегральной форме

$$\Delta\varphi = -\int_{НАЧ}^{КОНЕЦ} (\vec{E}, d\vec{l})$$

Из этого выражения следует теорема о циркуляции для электростатического поля:

для любой замкнутой траектории Г *находящейся в области пространства, где создано электростатическое поле значение интеграла*

$$\oint_{Г} (\vec{E}, d\vec{l}) = 0.$$

вдоль этой замкнутой линии Г *всегда равно нулю.*

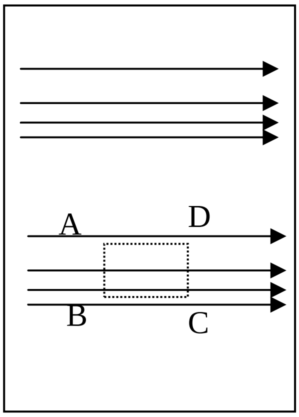
Действительно, в случае, когда точечный заряд перемещается вдоль какой-то замкнутой траектории Г, выполняется равенство $\varphi_{КОН} = \varphi_{НАЧ}$, поэтому

$$\oint_{Г} (\vec{E}, d\vec{l}) = \int_{НАЧ}^{КОНЕЦ} (\vec{E}, d\vec{l}) = -\Delta\varphi = \varphi_{НАЧ} - \varphi_{КОН} = 0.$$

Из теоремы Стокса следует *дифференциальная форма* теоремы о циркуляции:

т.к. электростатическое поле потенциальное, то его ротор равен нулевому вектору в каждой точке:

$$rot\vec{E} = \vec{0}.$$



Пример. *Можно ли создать неоднородное электростатическое поле, силовые линии которого параллельны друг другу?*

В электростатическом поле для любого замкнутого контура Г выполняется равенство $\oint\limits_{\Gamma}\left(\vec{E},d\vec{l}\right)=0$. Если возьмём в качестве контура Г прямоугольник ABCD, то интеграл можно разбить на 4 интеграла вдоль сторон этого прямоугольника:

$$\oint\limits_{\Gamma}\left(\vec{E},d\vec{l}\right)=\int\limits_{AB}\left(\vec{E},d\vec{l}\right)+\int\limits_{BC}\left(\vec{E},d\vec{l}\right)+\int\limits_{CD}\left(\vec{E},d\vec{l}\right)+\int\limits_{DA}\left(\vec{E},d\vec{l}\right).$$

Но на сторонах AB и CD векторы $\vec{E}$ и $d\vec{l}$ перпендикулярны друг другу, т.е. $\left(\vec{E},d\vec{l}\right)=0$, поэтому $\int\limits_{AB}\left(\vec{E},d\vec{l}\right)=0$ и $\int\limits_{CD}\left(\vec{E},d\vec{l}\right)=0$.

На стороне BC векторы $\vec{E}$ и $d\vec{l}$ направлены одинаково, на стороне DA направлены противоположно, откуда

$$\oint\limits_{\Gamma}\left(\vec{E},d\vec{l}\right)=\int\limits_{BC}\left(\vec{E},d\vec{l}\right)+\int\limits_{DA}\left(\vec{E},d\vec{l}\right)=\int\limits_{BC}E\cdot\left(cos\,0^0\right)\cdot dl+\int\limits_{DA}E\cdot\left(cos180^0\right)\cdot dl=\int\limits_{BC}Edl-\int\limits_{DA}Edl.$$

Вблизи стороны BC силовые линии расположены гуще, чем вблизи стороны DA, поэтому $E_{BC}>E_{DA}$, следовательно

$$\oint\limits_{\Gamma}\left(\vec{E},d\vec{l}\right)=\int\limits_{BC}Edl-\int\limits_{DA}Edl=E_{BC}\cdot\left|BC\right|-E_{DA}\cdot\left|DA\right|\neq 0.$$

То есть для такого поля не выполняется теорема о циркуляции.♣

Принцип суперпозиции для потенциалов.

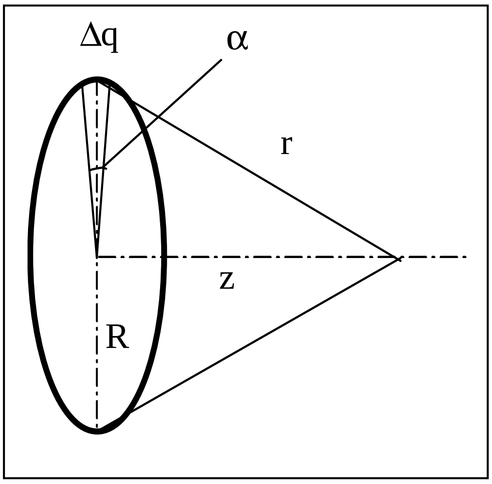
Из принципа суперпозиции следует

$$\vec{E}_{\Sigma}=\sum_i\vec{E}_i=-\sum_i grad\left(\varphi_i\right)=-grad\left(\sum_i\varphi_i\right)=-grad\left(\varphi_{\Sigma}\right),$$

$$\text{т.е. } \varphi_{\Sigma}=\sum_i\varphi_i.$$

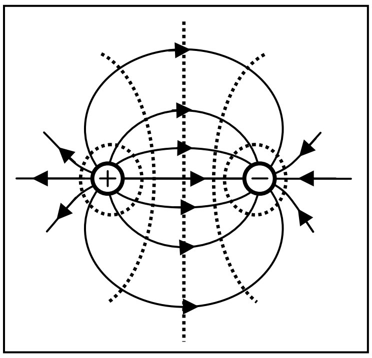
Потенциал в данной точке поля, создаваемого системой зарядов равен алгебраической сумме потенциалов поля, создаваемых каждым из зарядов в отдельности.

Пример. *Рассмотрим электрическое поле, создаваемое заряженным кольцом, радиус которого R. Найдем потенциал на оси кольца на расстоянии* z *от плоскости кольца.*



Решение. Разобьем кольцо на большое количество участков, опирающихся на центральный угол $\alpha = \frac{2\pi}{N}$. (Длина одного участка $L = \frac{2\pi R}{N}$.) Заряд одного участка $q = \frac{Q}{N}$, где Q – заряд кольца. Будем считать, что Q>0. Принимая малый участок кольца за точечный заряд можно найти потенциал поля на оси кольца, создаваемого одним участком: $\varphi_\alpha = k\frac{q}{r}$, где $r = \sqrt{R^2 + z^2}$. Тогда, в соответствии с принципом суперпозиции, суммарный потенциал

$$\varphi = \sum_\alpha \varphi_\alpha = \sum_\alpha k\frac{q}{r} = \sum_\alpha k\frac{Q/N}{r} = Nk\frac{Q/N}{r} = k\frac{Q}{\sqrt{R^2+z^2}}.$$



Из этой формулы видно, что потенциал в центре кольца (z=0) равен $\varphi = k\frac{Q}{R}$.♣

Пример. Картина поля для системы двух одинаковых по величине, но разноименных зарядов.

<u>Энергия системы зарядов</u> равна сумме энергий попарных взаимодействий

$$W_\Sigma = \frac{1}{2}\sum_{i,j} W_{ij}$$

Здесь множитель $\frac{1}{2}$ учитывает, что одна и та же пара индексов встречается в этом выражении два раза - один раз как (*ij*), а второй раз как (*ji*). Запишем это выражение через потенциалы

$$W_\Sigma = \frac{1}{2}\sum_{i,j} W_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} q_i\varphi_j = \frac{1}{2}\sum_i q_i\left(\sum_{j\neq i}\varphi_j\right).$$

Последнее выражение включает в себя сумму потенциалов полей $\sum_{j\neq i}\varphi_j$, создаваемых всеми зарядами, за исключением номера *i*, в том месте, где находится заряд с номером *i*.

Пример. Найдем энергию взаимодействия двух точечных зарядов q_1 и q_2.

В точке, где находится заряд q_1, второй заряд создаёт потенциал $\varphi_2 = k\frac{q_2}{R}$. В точке, где находится заряд q_2, первый заряд создаёт потенциал $\varphi_1 = k\frac{q_1}{R}$. Тогда

$$W = \frac{1}{2}\left(q_1\varphi_2 + q_2\varphi_1\right) = \frac{1}{2}\left(q_1 k\frac{q_2}{R} + q_2 k\frac{q_1}{R}\right) = k\frac{q_1 q_2}{R}. \clubsuit$$

Очень часто распределение зарядов в пространстве можно задать с помощью функции, называемой плотностью распределения (электрической плотностью).

1) Объёмная плотность распределения $\rho(x,y,z)$ (единицы измерения Кл/м^3). Тогда суммарный заряд объема $Q = \iiint\limits_V \rho dV$. Энергию взаимодействия некоторого точечного заряда q с заряженным телом можно определить следующим образом $W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \iiint\limits_V \frac{\rho}{r} dV$, где r – расстояние от точечного заряда q до точки, где задана плотность $\rho(x,y,z)$.
2) Поверхностная плотность распределения заряда $\sigma(x,y,z)$ (единицы измерения Кл/м^2). Тогда суммарный заряд поверхностности $Q = \iint\limits_S \sigma dS$. Энергия взаимодействия некоторого точечного заряда q с заряженной поверхностью $W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \iint\limits_S \frac{\sigma}{r} dS$ где r – расстояние от точечного заряда q до точки, где задана плотность $\sigma(x,y,z)$.
3) Линейная плотность распределения заряда $\lambda(x,y,z)$ (Единицы измерения Кл/м). Тогда суммарный заряд кривой линии $Q = \int\limits_\Gamma \lambda dl$. Энергия взаимодействия некоторого точечного заряда q с заряженной линией $W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \int\limits_\Gamma \frac{\lambda}{r} dl$ где r – расстояние от точечного заряда q до точки, где задана плотность $\lambda(x,y,z)$.

<u>Потоком вектора напряжённости</u> электрического поля через ориентированную поверхность S называется величина $\Phi_{\vec{E}} = \iint\limits_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right)$. Единица измерения В·м.

Теорема Гаусса в интегральной форме.

Поток вектора напряжённости электрического поля через произвольную замкнутую поверхность, ориентированную наружу, прямо пропорционален алгебраической сумме электрических зарядов, охваченных этой поверхностью. Коэффициент пропорциональности $\frac{1}{\varepsilon_0}$.

$$\oiint_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}$$

Если ввести функцию объёмного распределения электрического заряда $\rho(x,y,z)$, такую, что

$$\iiint_V \rho dV = \sum_i q_i$$

и воспользоваться теоремой Остроградского-Гаусса $\oiint_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = \iiint_V div\left(\vec{E}\right) dV$, то из равенства

$$\iiint_V div\left(\vec{E}\right) dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho dV$$

получим дифференциальную форму теоремы Гаусса:

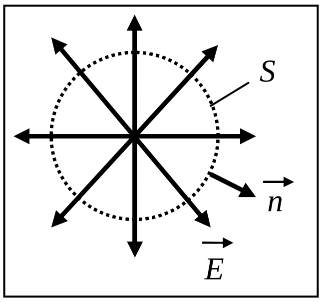
$$div\left(\vec{E}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Смысл этого равенства состоит в том, что *источником электрического поля являются электрические заряды*. Силовые линии электростатического поля начинаются на положительных и оканчиваются на отрицательных зарядах - т.е. электрические заряды являются источниками и стоками электрического поля.

Примеры применения теоремы Гаусса.

Теорему Гаусса удобно применять для определения напряжённости поля в случаях, когда картина силовых линий обладает какой-либо симметрией.

1) *Поле точечного заряда* q.

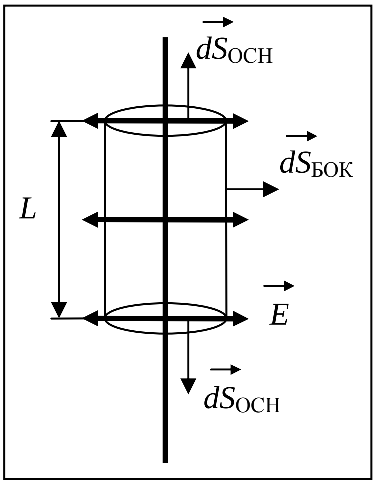


Пусть q>0. Возьмём в качестве поверхности S сферу радиусом R с центром в месте нахождения заряда. На поверхности этой сферы вектор $\vec{E}$ сонаправлен с вектором внешней нормали $\vec{n}$ к поверхности сферы, поэтому $\left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = \left(\vec{E}, \vec{n}\right) dS = E\left|\vec{n}\right| cos\, 0^o dS = EdS$. В каждой точке поверхности сферы, поэтому

$$\oiint_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = \oiint_S EdS = E \oiint_S dS = ES$$

Так как площадь поверхности сферы $S = 4\pi R^2$, то поток вектора напряженности

$$\oiint_S \left(\vec{E},d\vec{S}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$



2) *Поле бесконечной прямой заряженной нити*. Пусть нить заряжена с линейной плотностью заряда $\lambda>0$.

Как мы уже знаем, силовые линии поля направлены перпендикулярно нити и картина поля в целом обладает осевой симметрией относительно нити.

Найдем поток напряжённости через поверхность прямого цилиндра радиуса R и высоты L, ось которого совпадает с осью цилиндра.

$$\oiint_{\text{ЦИЛИНДР}} \left(\vec{E},d\vec{S}\right) = \iint_{\text{ОСНОВАНИЯ}} \left(\vec{E},d\vec{S}\right) + \iint_{\substack{\text{БОКОВАЯ}\\ \text{ПОВЕРХНОСТЬ}}} \left(\vec{E},d\vec{S}\right)$$

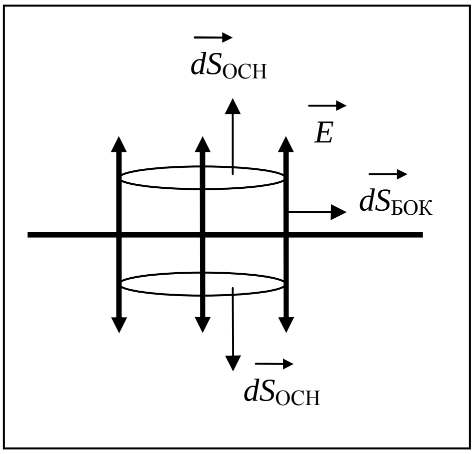
На основаниях цилиндра векторы $d\vec{S} \perp \vec{E}$, поэтому $\iint\limits_{\text{ОСНОВАНИЯ}} \left(\vec{E},d\vec{S}\right) = 0$.

На боковой поверхности $d\vec{S} \uparrow\uparrow \vec{E}$, поэтому $\iint\limits_{\substack{\text{БОКОВАЯ}\\ \text{ПОВЕРХНОСТЬ}}} \left(\vec{E},d\vec{S}\right) = \iint\limits_{\substack{\text{БОКОВАЯ}\\ \text{ПОВЕРХНОСТЬ}}} EdS$.

Т.к. картина поля осесимметрична, то величина E зависит только от расстояния до нити, поэтому на боковой поверхности этого цилиндра величина E=const.

$$\iint_{\substack{\text{БОКОВАЯ}\\ \text{ПОВЕРХНОСТЬ}}} \left(\vec{E},d\vec{S}\right) = \iint_{\substack{\text{БОКОВАЯ}\\ \text{ПОВЕРХНОСТЬ}}} EdS = E\iint_{\substack{\text{БОКОВАЯ}\\ \text{ПОВЕРХНОСТЬ}}} dS = ES_{\substack{\text{БОКОВАЯ}\\ \text{ПОВЕРХНОСТЬ}}} = E2\pi RL.$$

По теореме Гаусса $\oiint\limits_S \left(\vec{E},d\vec{S}\right) = \frac{q_{ВНУТР}}{\varepsilon_0}$. Но внутри цилиндра находится часть нити длиной L, поэтому $q_{ВНУТР} = \lambda \cdot L$. Поэтому $E2\pi RL = \frac{\lambda \cdot L}{\varepsilon_0}$, откуда $E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$.



3) *Поле бесконечной заряженной плоскости*. Пусть поверхностная плотность заряда $\sigma>0$. Картина силовых линий симметрична относительно плоскости. Найдём поток через поверхность прямого цилиндра, основания которого параллельны плоскости, и расположенного так, что плоскость делит цилиндр *пополам*. В этом случае наблюдается симметрия относительно плоскости.

$$\oiint_{\text{ЦИЛИНДР}} \left(\vec{E},d\vec{S}\right) = \iint_{\text{ОСНОВАНИЯ}} \left(\vec{E},d\vec{S}\right) + \iint_{\substack{\text{БОКОВАЯ}\\ \text{ПОВЕРХНОСТЬ}}} \left(\vec{E},d\vec{S}\right).$$

Тогда $\iint\limits_{\substack{БОКОВАЯ\\ПОВЕРХНОСТЬ}} \left(\vec{E},d\vec{S}\right)=0$.

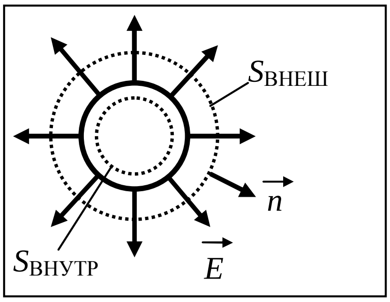
На основаниях цилиндра величина потока будет одинаковой (из-за симметрии):

$$\iint\limits_{ОСНОВАНИЯ} \left(\vec{E},d\vec{S}\right)=2ES_{ОСНОВАНИЕ}.$$

Величина заряда внутри цилиндра $q=\sigma\cdot S_{\text{ОСНОВАНИЕ}}$.

Поэтому, по теореме Гаусса $2ES_{ОСНОВАНИЕ}=\frac{\sigma\cdot S_{\text{ОСНОВАНИЕ}}}{\varepsilon_0}$, откуда $E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

4) *Поле тонкостенной (полой) заряженной сферы.*



Картина силовых линий обладает центральной симметрией относительно центра сферы, поэтому величина напряженности поля зависит только от расстояния до центра сферы.

Сначала в качестве поверхности рассмотрим концентрическую сферическую поверхность, находящуюся внутри сферы.

$$\oiint\limits_{S_{ВНУТР}} \left(\vec{E},d\vec{S}\right)=\oiint\limits_{S_{ВНУТР}} EdS=E\oiint\limits_{S_{ВНУТР}} dS=ES_{ВНУТР}.$$

Но внутри сферы зарядов нет, поэтому $ES_{ВНУТР}=0$. Таким образом, напряжённость поля внутри сферы равна нулю $E=0$.

Теперь в качестве поверхности рассмотрим концентрическую сферическую поверхность радиуса *R*, охватывающую сферу. Тогда

$$\oiint\limits_{S_{ВНЕШ}} \left(\vec{E},d\vec{S}\right)=\oiint\limits_{S_{ВНЕШ}} EdS=E\oiint\limits_{S_{ВНЕШ}} dS=ES_{ВНЕШ}.$$

Эта поверхность охватывает сферу целиком, поэтому $ES_{ВНЕШ}=\frac{q}{\varepsilon_0}$, откуда

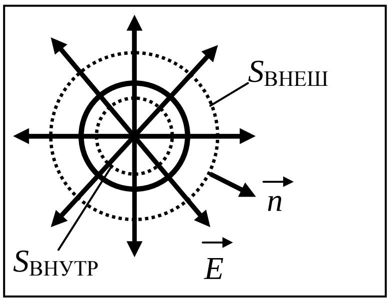
$$E=\frac{q}{\varepsilon_0 S_{ВНЕШ}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

5) *Поле, создаваемое полым бесконечным заряженным цилиндром радиуса R.*

Картина силовых линий симметрична относительно оси цилиндра.

Внутри цилиндра *E*=0, а снаружи $E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$, где λ - линейная плотность заряда цилиндра, *r*- расстояние от оси цилиндра. Если для цилиндра задана поверхностная плотность заряда σ, то, т.к. заряд куска цилиндра длиной *L* $q=\lambda L=\sigma 2\pi RL$, откуда получаем $\lambda=\sigma 2\pi R$, поэтому

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot\frac{R}{r}.$$



6) *Поле, создаваемое шаром радиуса R и заряженным равномерно зарядом q*. Картина силовых линий обладает центральной симметрией. Выделим внутри шара сферу радиуса r с центром, совпадающим с центром шара. Тогда

$$\oint\!\!\!\oint_{S_{ВНУТР}} \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = ES_{ВНУТР} = \frac{q_{ВНУТР}}{\varepsilon_0}.$$

Заряд внутри сферы $q_{ВНУТР} = \frac{q}{V_{ШАР}} V_{ВНУТР}$, где объём шара $V_{ШАР} = \frac{4}{3}\pi R^3$, объём внутри сферы $V_{ВНУТР} = \frac{4}{3}\pi r^3$, площадь поверхности внутренней сферы $S_{ВНУТР} = 4\pi r^2$. Тогда

$E 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{q}{\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)} \frac{4}{3}\pi r^3$, поэтому внутри шара $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^3} r$.

Замечание. Это равенство можно записать в векторном виде $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^3}\vec{r}$, где $\vec{r}$ - радиус-вектор из центра шара.

Снаружи шара картина поля аналогична уже разобранному полю заряженной сферы

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Уравнение Пуассона

Общая задача электростатики состоит в том, чтобы по распределению зарядов в пространстве определить потенциал φ и, следовательно, напряжённость электростатического поля.

Из соотношений $\vec{E} = -grad\varphi$ и $div\left(\vec{E}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ получаем уравнение

$$div\left(grad\varphi\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

описывающее распределение потенциала по заданному распределению заряда.

В декартовой системе координат

$$div\left(grad\varphi\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi$$

(Δ - оператор Лапласа), поэтому уравнение принимает вид $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$. Это *уравнение Пуассона*.

При отсутствии зарядов (ρ=0) получаем *уравнение Лапласа* $\Delta\varphi = 0$.

При решении подобной задачи необходимо задать граничные условия – значения потенциала или напряжённости на границе рассматриваемой области.