Лекция 3. **Электростатическое поле в диэлектрике**.

Электрический диполь в электростатическом поле. Поляризация диэлектриков. Электростатическое поле в диэлектрике. Поляризованность. Свободные и связанные заряды. Связь поляризованности с плотностью связанных зарядов. Вектор электрического смещения. Обобщение теоремы Гаусса. Поле на границе раздела диэлектриков.

Все вещества состоят из атомов и молекул, которые, в свою очередь, состоят из заряженных частиц. Эти заряженные частицы находятся в постоянном движении, поэтому при классическом описании их движения будут рассматриваться *усреднённые по времени величины*. Если в веществе есть электрические заряды, способные относительно свободно перемещаться в пределах тела даже под действием слабого электрического поля, то такие вещества относятся к так называемому классу проводников. Соответственно, вещества, в которых нет «свободно» движущихся зарядов (при обычных условиях) относят к диэлектрикам.

Замечание. Это деление на классы проводников и диэлектриков весьма условно. Некоторые вещества, являющиеся проводниками в определённых условиях, становятся диэлектриками в других, и наоборот.

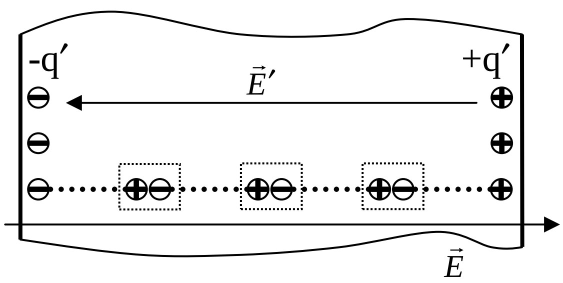
Замечание. В проводниках, находящихся в электростатическом поле, суммарное внутреннее электрическое поле характеризуются нулевой напряженностью. В диэлектриках напряженность суммарного поля отлична от нуля.

Рассмотрим поведение диэлектриков в электрическом поле.

Заряды, не входящие в состав вещества, будем называть сторонними (но они могут находиться внутри вещества). Эти заряды создают электрическое поле, которое будем называть внешним.

В диэлектрике при нормальных условиях нет свободно движущихся носителей зарядов. Все заряды, из которых состоит диэлектрик, связаны друг с другом. Их называют связанными. Электрические заряды образуют молекулы. Если в отсутствии внешнего электрического поля электрические заряды в молекуле пространственно разделены, то молекула называется *полярной*, в противном случае – *неполярной*.

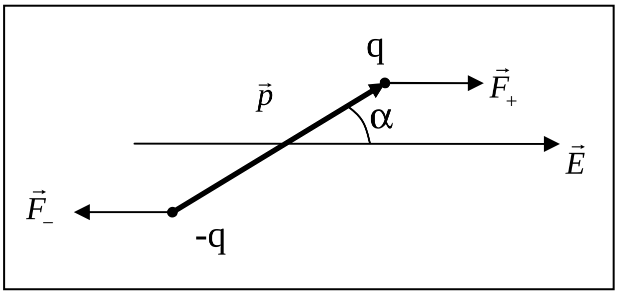
Во внешнем электрическом поле неполярная молекула вытягивается вдоль силовой линии поля, а полярная разворачивается. Можно приближенно считать, что крайние связанные заряды двух соседних диполей в глубине диэлектрика взаимно компенсируются, но заряды, расположенные вблизи поверхности диэлектрика ничем не скомпенсированы. Эти некомпенсированные заряды



создают дополнительное электрическое поле внутри диэлектрика, которое изменяет внешнее. Это явление разделения связанных зарядов и появления дополнительного поля называется *поляризацией диэлектрика*.

Теперь опишем поляризацию количественно.

В простейшем случае молекулу можно представить как два одинаковых по величине, но



противоположных по знаку заряда. Такая система зарядов называется *диполь*. Электрическим дипольным моментом называется векторная величина $\vec{p} = q\vec{L}$, где q – величина заряда, L – расстояние между зарядами. (Единица измерения Кл·м).

Вектор момента $\vec{p}$ направлен от отрицательного заряда к положительному.

На диполь, помещенный в электрическое поле, действует момент пары сил, величина которого

$$M = F_+ L \sin\alpha = qEL\sin\alpha = pE\sin\alpha .$$

В векторном виде

$$\vec{M} = \vec{p}\times\vec{E} .$$

В состоянии равновесия диполя вектор дипольного момента $\vec{p}$ параллелен вектору напряженности $\vec{E}$.

В отсутствии внешнего поля в диэлектрике с полярными молекулами, диполи ориентированы хаотически. В диэлектрике, находящемся в электростатическом поле, в состоянии равновесии диполи преимущественно расположены вдоль поля.

Рассмотрим в диэлектрике некоторый физически малый объем величиной V. Введем *вектор поляризованности вещества*

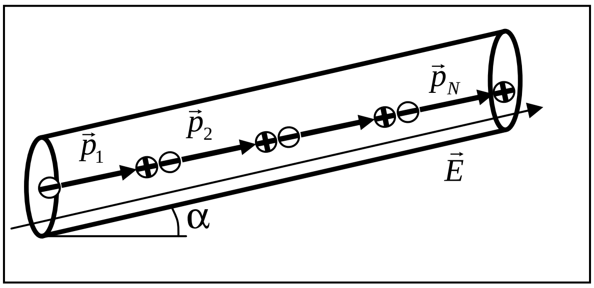
$$\vec{P} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i}{V} .$$

Единица измерения Кл/м^2. В однородном изотропном диэлектрике этот вектор направлен параллельно вектору напряженности, поэтому можно записать

$$\vec{P} = æ\varepsilon_0\vec{E} .$$

Безразмерный параметр æ называется коэффициентом поляризуемости или диэлектрической восприимчивостью вещества.

Рассмотрим тонкий косой цилиндр, ось которого параллельна вектору напряженности внешнего поля.



$$\left|\vec{P}\right| = \left|\frac{\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i}{V}\right| = \frac{Nq'L}{SNL\cos\alpha} = \frac{q'}{S\cos\alpha} = \frac{\sigma'}{\cos\alpha}$$

где q' - величина связанного заряда. Обратите внимание: величина вектора не зависит от количества суммируемых диполей – она определяется только поверхностной плотностью связанного заряда. Отсюда получаем для нормальной составляющей вектора

$$P_n = \left|P\right|\cos\alpha = \sigma'.$$

Нормальная составляющая вектора поляризованности равна поверхностной плотности связанного заряда.

Теперь найдём поток вектора поляризованности через некоторую малую поверхность S.

$$\Phi_P = \iint_S \left(\vec{P}, d\vec{S}\right) = \iint_S \left|P\right|\cos\alpha dS \approx \left|P\right|\cos\alpha S = \sigma' S = q'.$$

Таким образом, *поток вектора поляризованности через некоторую малую площадку равен величине связанного заряда, создающего этот вектор*.

Рассмотрим поток этого вектора через некоторую замкнутую ориентированную поверхность внутри диэлектрика

$$\oiint_S \left(\vec{P}, d\vec{S}\right) = \oiint_S \left|P\right|\cos\alpha dS = \oiint_S \sigma' dS .$$

Предположим, что вектор поляризованности направлен наружу, т.е. внутри поверхности суммарный связанный заряд отрицательный. Тогда, учитывая, что поток вектора положительный, а заряд отрицательный:

$$\oiint_S \left(\vec{P}, d\vec{S}\right) = \oiint_S \sigma' dS = -q'.$$

Это теорема Гаусса для вектора поляризованности в интегральном виде. Соответственно, в дифференциальном виде:

$$div\left(\vec{P}\right) = -\rho'.$$

Запишем теорему Гаусса для электростатического поля внутри диэлектрика

$$div\left(\vec{E}\right) = \frac{\rho_{CTOP} + \rho'}{\varepsilon_0}.$$

(здесь указано, что электрическое поле создается сторонними зарядами с объемной плотностью ρ и связанными зарядами с объемной плотностью ρ′).

$$div\left(\varepsilon_0\vec{E}\right) = \rho_{CTOP} + \rho' = \rho_{CTOP} - div\left(\vec{P}\right) \text{ или } div\left(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\right) = \rho_{CTOP}.$$

Вектор $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ называется вектором *электрического смещения* или *вектором электрической индукции*. Следовательно, из теоремы Гаусса для вектора электрической напряженности следует теорема Гаусса для вектора электрического смещения

$$div\left(\vec{D}\right) = \rho_{СТОР}.$$

Это теорема Гаусса для электрического поля в веществе (в дифференциальной форме).

В интегральной форме теорема Гаусса для электрического поля в веществе: *поток вектора электрического смещения через любую замкнутую поверхность, ориентированную наружу, равен алгебраической сумме* <u>*сторонних*</u> *зарядов, охватываемых этой поверхностью.*

$$\oiint_S \left(\vec{D}, d\vec{S}\right) = q.$$

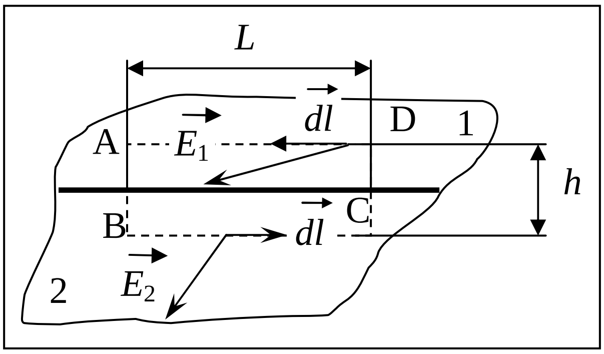
В однородном, изотропном диэлектрике $\vec{P} = æ\varepsilon_0 \vec{E}$, поэтому

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + æ\varepsilon_0 \vec{E} = \left(æ + 1\right)\varepsilon_0 \vec{E}$$

Если обозначить ε=æ+1 – (*относительную*) *диэлектрическую проницаемость вещества*, то для вектора смещения внутри однородного изотропного диэлектрика $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}$.

Замечание. Для вакуума ε=1 (нет вещества, поэтому æ=0). Для воздуха при условиях незначительно отличающихся от нормальных тоже ε≈1.

Поле на границе раздела диэлектриков.



Рассмотрим поле на плоской границе раздела (в случае неплоской границы достаточно рассмотреть очень малый участок). Воспользуемся теоремой о циркуляции вектора напряженности в интегральном виде

$$\oint_L \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = 0.$$

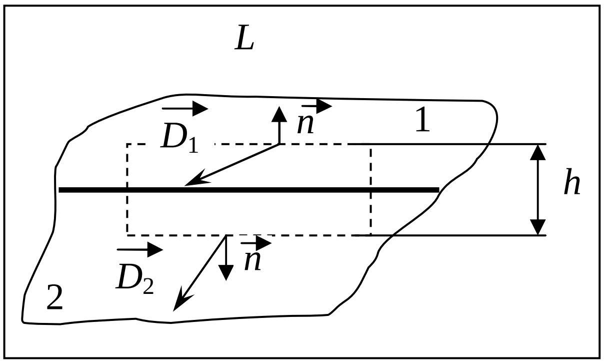
В качестве контура интегрирования выберем прямоугольник ABCD размером $L \times h$, расположенный таким образом, что одна сторона DA находится в первом диэлектрике, вторая BC – во втором, а граница делит прямоугольник пополам.

$$\oint_L \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = \int_{DA} \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) + \int_{AB} \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) + \int_{BC} \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) + \int_{CD} \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = 0.$$

При устремлении $h \to 0$ значения второго и четвёртого интегралов стремятся к нулю.

Но $\left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = E_t dl$, где E_t – касательная составляющая вектора напряженности.

Поэтому $\oint_L \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) \approx \int_{DA} \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) + \int_{AB} \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = E_{1t} L - E_{2t} L = 0.$



Окончательно, $E_{1t} = E_{2t}$ - *на границе раздела диэлектриков величина касательной составляющей вектора напряженности электрического поля не меняется.*

Теперь применим теорему Гаусса в веществе.

$$\oiint_S \left(\vec{D}, d\vec{S}\right) = q .$$

В качестве поверхности интегрирования выберем прямой цилиндр высотой h, основания которого (площадью S каждое) параллельны границе раздела. Пусть граница раздела делит пополам цилиндр. Тогда

$$\oiint_S \left(\vec{D}, d\vec{S}\right) = \iint_{S_{1OCH}} \left(\vec{D}, d\vec{S}\right) + \iint_{S_{2OCH}} \left(\vec{D}, d\vec{S}\right) + \iint_{S_{БОК}} \left(\vec{D}, d\vec{S}\right) = q .$$

Учтем, что $\left(\vec{D}, d\vec{S}\right) = \left(\vec{D}, \vec{n}\right) dS = D_n dS$, где D_n – нормальная составляющая вектора смещения.

Если высота цилиндра стремится к нулю $h \to 0$, интеграл по боковой поверхности цилиндра стремится к нулю, поэтому

$$\iint_{S_{1OCH}} \left(\vec{D}, d\vec{S}\right) + \iint_{S_{2OCH}} \left(\vec{D}, d\vec{S}\right) \approx -D_{1n} S + D_{2n} S$$

В пределе, с учетом $q = \iint_{S_{OCH}} \sigma dS = \sigma S$, получаем

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma .$$

Изменение величины нормальной составляющей вектора смещения на границе раздела диэлектриков равно плотности стороннего заряда на границе. Если на границе нет сторонних зарядов (σ=0), то нормальная составляющая вектора смещения не меняется: $D_{2n} = D_{1n}$

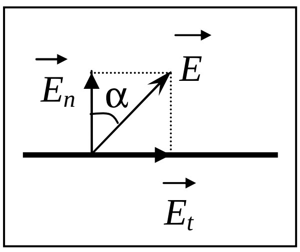
Если рассмотреть *теорему Гаусса для вектора поляризованности* в интегральной форме

$$\oiint_S \left(\vec{P}, d\vec{S}\right) = -q'$$

то можно, по аналогии, записать

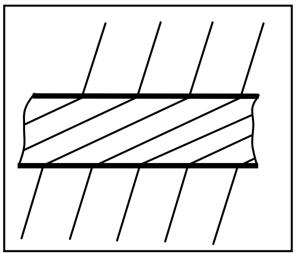
$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma' .$$

Изменение величины нормальной составляющей вектора поляризованности равно с обратным знаком поверхностной плотности связанного заряда.



Соотношения на границе диэлектрика (при отсутствии сторонних зарядов) можно переписать в виде $\varepsilon_2 E_{2n} = \varepsilon_1 E_{1n}$, $E_{1t} = E_{2t}$.Если ввести угол отклонения силовой линии от нормали к границе диэлектрика $tg\alpha = \dfrac{E_t}{E_n}$, то для углов по разные стороны от границы

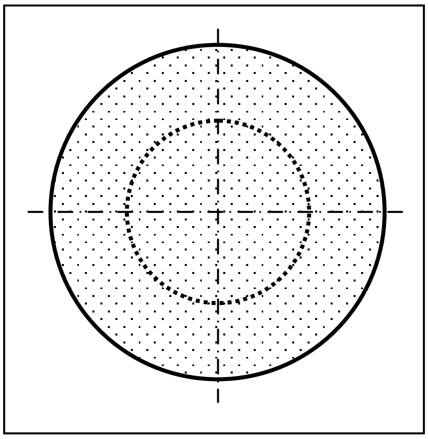
$$\frac{tg\alpha_2}{tg\alpha_1}=\frac{E_{2t}}{E_{2n}}\frac{E_{1n}}{E_{1t}}=\frac{E_{1n}}{E_{2n}}=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$



При $\varepsilon_2>\varepsilon_1$ получаем $\alpha_2>\alpha_1$ – в диэлектрике с большей относительной проницаемостью силовые линии больше отклоняются от вертикального направления. Т.е. можно сказать, что в диэлектрике силовые линии электрического поля сгущаются. Говорят, что диэлектрик «накапливает силовые линии».

Пример. *Рассмотрим поле внутри и снаружи равномерно заряженного шара*. Диэлектрическая проницаемость внутри постоянна и равна $\varepsilon>1$. Вне шара $\varepsilon=1$. Пусть заряд шара $q>0$, а радиус R, тогда объемная плотность заряда $\rho=\frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$. Задача имеет сферическую симметрию.

При $r<R$ в качестве поверхности интегрирования возьмем концентрическую сферу меньшего



радиуса. Поверхность ориентирована наружу. Вектор смещения и нормаль в каждой точке параллельны друг другу. По теореме Гаусса $D4\pi r^2=\rho\frac{4}{3}\pi r^3$.

Поэтому при $r<R$ получаем величина смещения $D=\frac{\rho}{3}r$, откуда для напряжённости $E_1=\frac{D_1}{\varepsilon\varepsilon_0}$

$$E_1=\frac{\rho}{3\varepsilon\varepsilon_0}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^3}r.$$

Снаружи при $r>R$ напряжённость поля $E_2=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. Видно, что на границе раздела величина вектора напряженности терпит разрыв при $r=R$ (т.к. $\varepsilon>1$):

$$E_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2}<E_2=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Этот «разрыв» величины напряжённости вызван наличием на поверхности диэлектрика связанных зарядов.

На границе шара сохраняется нормальная составляющая вектора смещения $D_{2n}=D_{1n}$: действительно, вектор $\vec{D}$ направлен по радиусу, поэтому его нормальная составляющая равна величине вектора $D_n=D$. Но на границе шара $D_1=D_2=\frac{q}{4\pi R^2}$

Величина поляризованности внутри шара

$$P_1 = æ_1\varepsilon_0 E_1 = (\varepsilon_1 - 1)\varepsilon_0 E_1 = (\varepsilon_1 - 1)\varepsilon_0 \frac{q}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0 R^3} r = \frac{(\varepsilon_1 - 1)}{4\pi\varepsilon_1}\frac{q}{R^3} r .$$

Вне шара величина вектора поляризованности (ε_2=1)

$$P_2 = æ_2\varepsilon_0 E_2 = (\varepsilon_2 - 1)\varepsilon_0 E_2 = 0 .$$

Вектор внутри шара $\vec{P}$ направлен по радиусу (т.к. он направлен также как $\vec{E}$), поэтому его нормальная составляющая равна величине вектора $P_n = P$.

Поэтому на границе должно выполняться: $-P_1 = -\sigma'$, откуда плотность связанных зарядов на поверхности шара:

$$\sigma' = (\varepsilon_1 - 1)\varepsilon_0 E_1 = (\varepsilon_1 - 1)\varepsilon_0 \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2} = \frac{q(\varepsilon_1 - 1)}{4\pi\varepsilon_1 R^2} .$$

Поверхностный связанный заряд $q'_{ПОВ} = \sigma' S = \frac{q(\varepsilon_1 - 1)}{4\pi\varepsilon_1 R^2} 4\pi R^2 = \frac{q(\varepsilon_1 - 1)}{\varepsilon_1}$.

Из теоремы Гаусса $div\left(\vec{P}\right) = -\rho'$ для вектора поляризованности найдём объёмную плотность связанного заряда.

Для сферически симметричного случая $div\vec{P} = 2\frac{P}{r} + \frac{dP}{dr}$, поэтому

$$\rho' = -\left(2\frac{P_1}{r} + \frac{dP_1}{dr}\right) = -\left(2\frac{(\varepsilon_1 - 1)}{4\pi\varepsilon_1}\frac{q}{R^3} + \frac{(\varepsilon_1 - 1)}{4\pi\varepsilon_1}\frac{q}{R^3}\right) = -3\frac{(\varepsilon_1 - 1)}{4\pi\varepsilon_1}\frac{q}{R^3}$$

Откуда связанный заряд внутри шара $q'_{ВНУТР} = \rho' V_{ВНУТР} = -3\frac{(\varepsilon_1 - 1)}{4\pi\varepsilon_1}\frac{q}{R^3}\frac{4}{3}\pi R^3 = -\frac{(\varepsilon_1 - 1)}{\varepsilon_1} q$.

Общий связанный заряд всего шара $q' = q'_{ВНУТР} + q'_{ПОВ} = 0$.♣