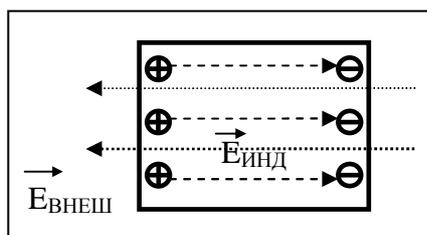


Лекция 4.

Электрическое поле заряженных проводников. Энергия электростатического поля.

Поле вблизи поверхности проводника. Электроёмкость проводников и конденсаторов. Ёмкости плоского, цилиндрического и сферического конденсаторов. Энергия системы неподвижных зарядов. Энергия заряженного проводника, конденсатора. Плотность энергии электростатического поля.

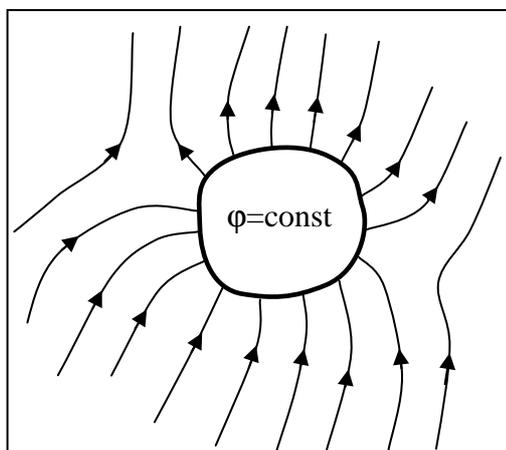
При внесении проводника во внешнее электрическое поле, свободные заряды внутри



проводника начинают перемещаться под действием сил со стороны внешнего поля до тех пор, пока не наступит равновесие. Это приводит к перераспределению электрического заряда внутри проводника. Области проводника, до этого электрически нейтральные, приобретают uncompensated electric charge. Следовательно, в проводнике появляется (или, как говорят, индуцируется) электрическое поле $E_{\text{ИНД}}$. Условие равновесия электрических зарядов

$$\vec{F} = q\vec{E}_{\text{ВНУТР}} = q(\vec{E}_{\text{ВНЕШ}} + \vec{E}_{\text{ИНД}}) = \vec{0}$$

т.е. напряженность поля внутри проводника



$$\vec{E}_{\text{ВНУТР}} = \vec{E}_{\text{ВНЕШ}} + \vec{E}_{\text{ИНД}} = \vec{0}.$$

Следовательно, из равенства $\vec{E}_{\text{ВНУТР}} = -\text{grad}(\varphi_{\text{ВНУТР}}) = \vec{0}$ получаем $\varphi_{\text{ВНУТР}} = \text{const}$ внутри проводника. Следовательно, это условие выполняется и на границе проводника. Поэтому поверхность проводника является *эквипотенциальной* поверхностью и силовые линии электрического поля перпендикулярны поверхности проводника в каждой его точке.

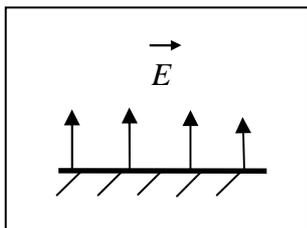
Заряженный проводник.

Если уединенному проводнику сообщить сторонний электрический заряд, то условие равновесия зарядов $\vec{F} = q\vec{E}_{\text{ВНУТР}} = \vec{0}$ опять приводит к условию

$$\vec{E}_{\text{ВНУТР}} = -\text{grad}(\varphi_{\text{ВНУТР}}) = \vec{0}, \quad \varphi_{\text{ВНУТР}} = \text{const} \quad \text{внутри проводника.}$$

Отсюда следует, что все сторонние заряды располагаются на поверхности проводника, т.к. напряженность поля внутри проводника равна нулю, а по теореме Гаусса для любой замкнутой поверхности внутри проводника (в том числе и для наружной поверхности проводника)

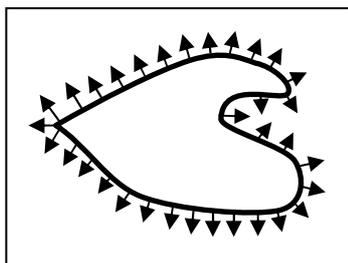
$$\oiint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = q_{\text{внутр}} = 0.$$



Так как поверхность проводника в этом случае тоже *эквипотенциальная*, то силовые линии электрического поля направлены перпендикулярно поверхности проводника в каждой его точке.

Из теоремы Гаусса следует, что вблизи поверхности проводника выполняется соотношение $D = \sigma$ - величина вектора электрического смещения равна поверхностной плотности сторонних зарядов.

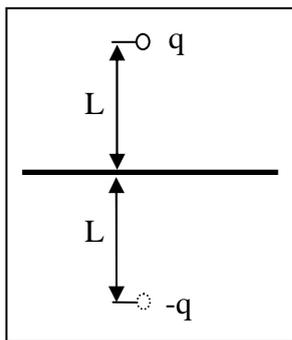
Заряд по поверхности проводника распределяется таким образом, чтобы потенциал поверхности оставался постоянным. Это приводит к тому, что на поверхности проводника плотность заряда не одинаковая. Например,



на острых частях проводников плотность зарядов больше, чем в углублениях. В связи с этим возникают различные явления, например, «стекание заряда»: если проводник находится в воздухе, то вблизи острия происходит ионизация воздуха, уносящая часть электрического заряда – явление, которое называется «электрический ветер».

Метод электрических изображений.

Если эквипотенциальную поверхность заменить проводящей, после чего отбросить часть поля, которую эта поверхность отделяет, то картина поля в оставшейся части не изменится. И наоборот, если картину поля дополнить фиктивными зарядами так, чтобы проводящую поверхность можно было заменить эквипотенциальной, то начальная картина поля не изменится.



Пример. Найдем силу притяжения точечного заряда к бесконечной проводящей плоскости. Для этого дополним картину ещё одним таким же зарядом, но противоположного знака, расположенным симметрично относительно плоскости. Тогда плоскость будет совпадать с эквипотенциальной поверхностью, поэтому плоскость можно отбросить и найти силу взаимодействия между зарядами $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4L^2}$.

Энергия заряженного проводника.

Энергия уединенного заряженного проводника определяется как энергия системы зарядов $W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \phi_i$. На проводнике $\phi = const$, поэтому энергия уединенного проводника

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \phi_i = \frac{1}{2} \phi \sum_i q_i = \frac{1}{2} \phi q.$$

Для системы заряженных проводников $W = \sum_k \frac{1}{2} \varphi_k q_k$.

В частности для двух проводников, имеющих одинаковые по величине, но разные по знаку заряды q : $W = \frac{1}{2} \varphi_1 q_1 + \frac{1}{2} \varphi_2 q_2 = \frac{q}{2} |\varphi_1 - \varphi_2|$

Замечание. Величина разности потенциалов $U = |\varphi_1 - \varphi_2|$ называется *напряжением* между телами.

Опыт показывает, что между зарядом уединённого проводника и его потенциалом существует линейная зависимость $q = C \cdot \varphi$ (при условии $\varphi = 0$ на бесконечно большом расстоянии от проводника). Коэффициент пропорциональности C называется коэффициентом электрической ёмкости или *электроёмкостью*:

$$C = \frac{q}{\varphi}.$$

Единица измерения электроёмкости – Фарад. $\Phi = \frac{\text{Кл}}{\text{В}}$.

Пример. Найдём ёмкость уединённого проводника имеющего форму сферы радиуса R .

Т.к. потенциал поверхности заряженного сферического проводника равен $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$, то ём-

кость определяется соотношением $C = \frac{q}{\varphi} = 4\pi\epsilon_0 R$. Исходя из этой формулы можно оценить

размеры проводника, ёмкость которого равна 1 Ф: $C = 1 \text{ Ф}$ при $R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9$ м. Средний ра-

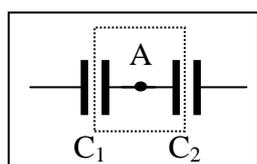
диус планеты Земля $R_3 \approx 6,4 \cdot 10^6$ м, следовательно, радиус такой сферы больше радиуса Земли примерно в 1400 раз. ♣

Конденсатором называется система из двух проводников, заряженных одинаковыми по величине, но разными по знаку зарядами. Величина заряда одного из проводников называется зарядом конденсатора. Проводники называются *обкладками конденсатора*.

Электроёмкость конденсатора определяется по формуле $C = \frac{q}{U}$.

Конденсатор условно обозначается .

Соединение конденсаторов



Рассмотрим последовательное соединение двух конденсаторов C_1 и C_2 . Точка А между конденсаторами отделена от остальной цепи, поэтому её электрический заряд измениться не может. Так как до включения в цепь на-

чальный заряд точки был равен нулю, то $q_A = q_{A1} + q_{A2} = 0$. Следовательно, заряды пластин кон-

денсаторов, примыкающих к точке А, равны между собой по величине, но противоположны по знаку. Но так как *величина* заряда пластин равна заряду конденсаторов, то заряды конденсаторов в этом случае равные: $q_1 = q_2$.

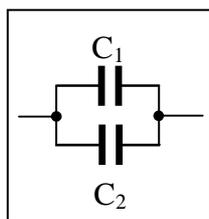
Суммарный заряд точки А равен нулю, поэтому если отбросить эту точку вместе с прилегающими обкладками, то в схеме ничего не изменится. Т.к. заряды крайних пластин тоже одинаковы по величине, но разные по знаку, то получившийся конденсатор будет иметь такой же по величине заряд.

ИТОГ. Заряды последовательно соединенных конденсаторов одинаковы по величине. Общий заряд последовательно соединенных конденсаторов равен заряду каждого из конденсаторов. Для этого случая общее напряжение равно сумме напряжений на конденсаторах

$U_{\text{ОБЩ}} = U_1 + U_2$. Заряды конденсаторов одинаковые $q_1 = q_2 = q$. Тогда $\frac{q}{C_{\text{ОБЩ}}} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2}$. Поэтому

$$\frac{1}{C_{\text{ОБЩ}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \text{ При последовательном соединении емкости складываются по закону обрат-}$$

ных величин. ♣



Расчет емкости при параллельном соединении конденсаторов.

Для этого случая напряжения на конденсаторах одинаковые $U_1 = U_2 = U$.

Суммарный заряд равен сумме зарядов $q_{\text{ОБЩ}} = q_1 + q_2$ или $C_{\text{ОБЩ}} \cdot U = C_1 U + C_2 U$

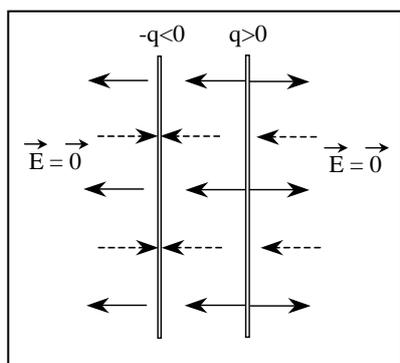
Тогда $C_{\text{ОБЩ}} = C_1 + C_2$. *При параллельном соединении конденсаторов емкости суммируются. ♣*

Энергия заряженного конденсатора $W = \sum_k \frac{1}{2} \phi_k q_k = \frac{q}{2} U = \frac{C U^2}{2} = \frac{q^2}{2C}$.

Замечание. Суммарный заряд обкладок конденсатора равен нулю. Конденсатор накапливает электрическую энергию путём разделения электрических зарядов.

Примеры по расчёту ёмкости конденсаторов.

Плоский (воздушный) конденсатор представляет собой две параллельные пластины, расстояние



между которыми много меньше размеров пластин, так что поле между пластинами можно считать однородным. Пусть между пластинами находится вакуум (воздух), поэтому $\epsilon = 1$.

В этом случае при расчете картины поля можно пользоваться результатами, полученными для поля бесконечной заряженной пластины. Так как заряды и площади пластин равны по величине, то и величина напряженности поля, создаваемого каж-

дой из пластин одинакова $E = \frac{q}{2\epsilon_0 S}$, но направления векторов напряженности разные (вектор напряженности от отрицательно заряженной пластины показан пунктиром). Между пластинами векторы напряженности направлены одинаково, поэтому величина суммарной напряженности равна сумме величин напряженностей

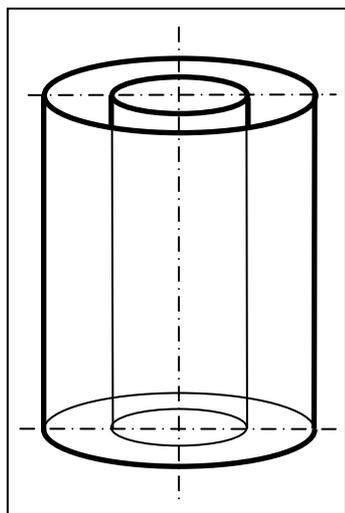
$$E_{\text{ВНУТРИ}} = E_+ + E_- = \frac{q}{2\epsilon_0 S} + \frac{q}{2\epsilon_0 S} = \frac{q}{\epsilon_0 S}.$$

Снаружи пластин векторы напряженности поля направлены противоположно, поэтому напряженность поля снаружи равна нулю. Таким образом, у конденсатора напряженность поля отлична от нуля только между пластинами.

Так как электростатическое поле является полем консервативной силы, то интеграл $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{\Gamma} (\vec{E}, d\vec{l})$ не зависит от траектории, поэтому разность потенциалов между пластинами можно найти, например, вдоль перпендикуляра, соединяющего пластины, длина которого равна d : $U = |\varphi_1 - \varphi_2| = E_{\text{ВНУТРИ}} \cdot d = \frac{q \cdot d}{\epsilon_0 S}$, где d – расстояние между пластинами. Тогда электроёмкость

$$\text{плоского (воздушного) конденсатора } C = \frac{q}{U} = \frac{\epsilon_0 S}{d}.$$

Цилиндрический (воздушный) конденсатор представляет собой два коаксиальных цилиндра одинаковой длины, вложенных друг в друга так, что расстояние между обкладками много меньше размеров обкладок.

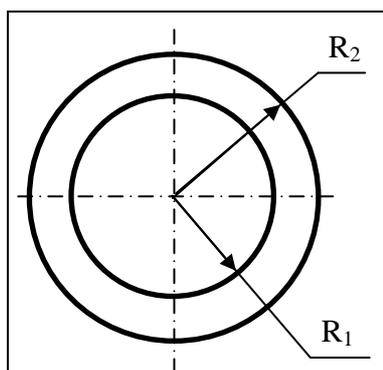


Пусть длина конденсатора L , заряд внутренней обкладки положительный $q > 0$. Радиусы обкладок R_1 и R_2 , $R_1 < R_2$. Величина напряжённости поля между обкладками на расстоянии r от внутренней обкладки $R_1 < r < R_2$: $E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 Lr}$. Напряжение между обкладками

$$U = |\varphi_1 - \varphi_2| = \left| \int_{R_1}^{R_2} (\vec{E}, d\vec{l}) \right| = \int_{R_1}^{R_2} \frac{qdr}{2\pi\epsilon_0 Lr} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

Поэтому электроёмкость цилиндрического (воздушного) конденсатора $C = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$.

Сферический (воздушный) конденсатор представляет собой две вложенные концентрические сферы с радиусами обкладок R_1 и R_2 , $R_1 < R_2$. Пусть заряд внутренней обкладки положительный



$q > 0$. Величина напряжённости поля между обкладками на расстоянии r от внутренней обкладки $R_1 < r < R_2$: $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. Напряжение между обкладками

$$U = |\varphi_1 - \varphi_2| = \left| \int_{R_1}^{R_2} (\vec{E}, d\vec{l}) \right| = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Поэтому электроёмкость сферического (воздушного) конденсатора

$$C = \frac{q}{U} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}$$

Объёмная плотность энергии электростатического поля.

Рассмотрим плоский воздушный конденсатор. Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon_0 S}{2d} (E \cdot d)^2 = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} S \cdot d$$

Объём пространства между пластинами конденсатора $V = S \cdot d$. Так поле между пластинами

рассматриваем как однородное, то единица объема этого поля обладает энергией $w = \frac{W}{V} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$.

Эта величина $w = \frac{W}{V}$ называется *объёмной плотностью энергии*.

В случае, когда поле не является однородным объёмная плотность энергии определяется соотношением $w = \frac{dW}{dV}$.

В веществе объёмная плотность энергии электрического поля определяется $w = \frac{(\vec{E}, \vec{D})}{2}$.

В случае однородного изотропного диэлектрика $\vec{D} = \epsilon\epsilon_0 \vec{E}$, поэтому $w = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon\epsilon_0}$.

Т.к. $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, то $w = \frac{(\vec{E}, \vec{D})}{2} = \frac{\epsilon_0 (\vec{E}, \vec{E})}{2} + \frac{(\vec{E}, \vec{P})}{2}$, где $\frac{\epsilon_0 (\vec{E}, \vec{E})}{2}$ - энергия электрического поля

в вакууме; $\frac{(\vec{E}, \vec{P})}{2}$ - энергия поляризации вещества.

Пример. Рассмотрим заряженную тонкостенную сферу радиуса R . Одноименные заряды на сфере отталкиваются друг от друга. Эти силы отталкивания стремятся растянуть поверхность сферы. Можно считать, что изнутри сферы на стенки действует дополнительное давление, распирающее сферу и вызванное наличием электрического заряда на поверхности.

Напряженность поля внутри сферы равна нулю, поэтому объемная плотность энергии электрического поля w отлична от нуля только снаружи сферы.

При небольшом увеличении радиуса на dR сферы её объём увеличится, при этом в той части окружающего пространства, которая попала внутрь сферы, объемная плотность энергии станет равной нулю. Следовательно, изменение энергии поля снаружи будет равно $dW = wdV = wSdR$ (S – площадь поверхности). Но, при расширении сферы, силы давления внутри сферы совершат работу $\delta A = pSdR$. Так как $\delta A = dW$, то $pSdR = wSdR$, откуда

$$p = w . \clubsuit$$

Пример. Найдем силы, действующие на пластины в заряженном плоском конденсаторе, отключённом от источника. Пластины заряжены разноименно, поэтому они притягиваются. Предположим, что пластины сблизилась на малую величину x . Тогда объём конденсатора уменьшился на величину $dV = xS$, поэтому энергия конденсатора уменьшилась на $dW = wdV$. Силы притяжения совершат работу $\delta A = Fx$. Так как $\delta A = dW$, то $Fx = wxS$. Поэтому величина силы равна $F = wS$.

Дополнительное давление, которое создают эти силы, равно $p = \frac{F}{S} = w . \clubsuit$

Приведённые примеры показывают, что на тела, находящиеся в электрическом поле, действуют силы, вызывающие дополнительное давление, равное объёмной плотности энергии. *Давление, вызванное наличием электрического поля равно объёмной плотности энергии.*

Замечание. Силы, действующие на тела со стороны какого-то поля, называются *пондемоторными*.