Лекции 5-6. **Магнитные явления.**

Вектор индукции магнитного поля. Закон Био-Савара. Принцип суперпозиции магнитных полей. Поле прямого и кругового токов. Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля в интегральной и дифференциальной форме. (Расчёт магнитного поля тороида и соленоида).

Намагниченность вещества. Вектор напряжённости магнитного поля и его связь с векторами индукции и намагниченности. Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость вещества. Диамагнетики, парамагнетики, ферромагнетики.

Опыт показывает, что электрические токи взаимодействуют между собой. Сила взаимодействия (на единицу длины) двух прямолинейных тонких параллельных проводников с токами I_1 и I_2 , расстояние между которыми равно b, дается *законом Ампера*

$$F_l = \frac{F}{l} = k\frac{I_1 I_2}{b}.$$

Одинаково направленные токи притягиваются, противоположно направленные – отталкиваются. Константа в вакууме имеет вид $k = \frac{\mu_0}{2\pi}$, где $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м (Генри/метр) – магнитная постоянная.

*Замечани*е. Магнитная постоянная и диэлектрическое постоянная «входят» в полезное соотношение $\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} = c^2$, где $c \approx 3\cdot 10^8$ - скорость света в вакууме.

Замечание. Закон Ампера связывает механическое понятие силы с единицами измерения силы тока и электрического заряда.

По современным представлениям токи взаимодействует между собой посредством промежуточной среды, которая называется *магнитное поле*.

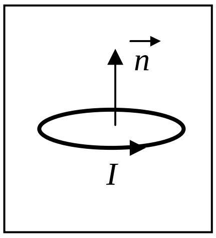
Магнитное поле характеризуется вектором магнитной индукции $\vec{B}$. Величина индукции измеряется в Теслах (Тл). *Силовой* линией магнитного поля называется линия в пространстве, касательная к которой в каждой точке направлена как вектор $\vec{B}$.

Магнитное поле проявляется в действии на *движущиеся* заряды (токи). *На покоящиеся заряды магнитное поле не действует*.

Магнитное поле не имеет источников - оно создается только движущимися зарядами (электрическим током), поэтому силовые линии магнитное поля являются ***замкнутыми линиями***.

Принцип суперпозиции для магнитного поля: вектор индукции магнитного поля, создаваемого системой движущихся электрических зарядов (электрических токов), равен векторной сумме индукций магнитных полей, создаваемых каждым из движущихся электрических зарядов (токов) в отдельности:

$$\vec{B}_{\Sigma} = \sum_{i} \vec{B}_i .$$



Аналогом пробного заряда для магнитного поля является *пробный контур* с током очень маленьких размеров. Этот контур является ориентированным – направление нормали $\vec{n}$ к площадке контура согласовано с направлением тока в нём правилом буравчика (правого винта). Опыт показывает, что на пробный контур действует вращающий момент сил, зависящий от угла между вектором индукции магнитного поля и вектором нормали к площадке контура, а также от силы тока и величины площади. Максимальное значение момента даётся выражением $M_{MAX} = ISB$. Поэтому величину индукции магнитного поля в данной точке определяют как

$$B = \frac{M_{MAX}}{IS} .$$

Определение. Магнитным моментом контура (с постоянным) током называется векторная величина

$$\vec{p}_m = I \cdot S \cdot \vec{n} .$$

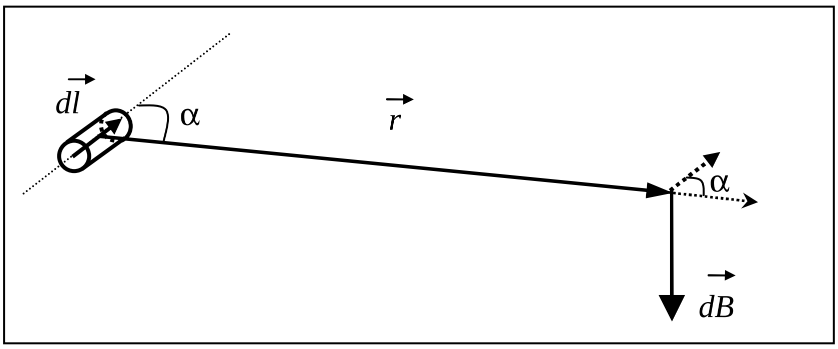
S- величина площадки, ограниченной контуром, I – сила тока. Контур является ориентированным – направление нормали к площадке контура согласовано с направлением тока в нём правилом буравчика (правого винта). Единица измерения магнитного момента А·м^2 (Ампер·м^2).

Закон Био-Савара-Лапласа.

Опыт показывает, что магнитная индукция, создаваемая малым участком проводника с током I, определяется законом Био-Савара-Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\left(d\vec{l} \times \vec{r}\right)}{r^3} .$$

Величина вектора $dB = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \dfrac{Idl}{r^2} sin\alpha$. Здесь $d\vec{l}$ - касательный вектор к линии тока, направленный



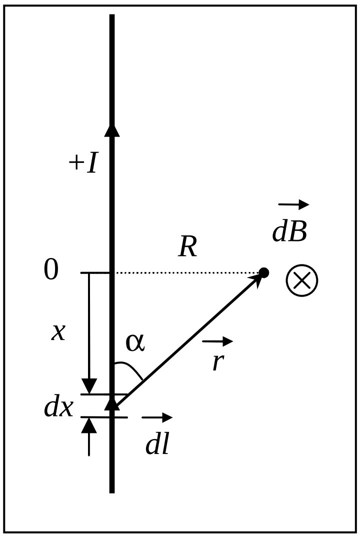
в положительном направлении для тока, (dl – длина малого проводника), I – сила тока в проводнике, $\vec{r}$ - вектор, проведенный от малого проводника в точку, где ищется вектор индукции магнитного поля, α - угол между векторами $d\vec{l}$ и $\vec{r}$. Векторы $\left(d\vec{l},\vec{r},d\vec{B}\right)$ образуют правую тройку векторов.

1) *Рассмотрим магнитное поле, создаваемое длинным тонким прямым проводом, по которому течет постоянный ток силой I.*

Найдем величину и направление вектора магнитной индукции в точке, находящейся на расстоянии R от провода. Применим принцип суперпозиции

$$\vec{B}=\sum_{d\vec{l}} d\vec{B}_{d\vec{l}},$$

где $d\vec{B}_{d\vec{l}}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\left(d\vec{l}\times\vec{r}\right)}{r^3}$ - вектор магнитной индукции, создаваемый элементом $d\vec{l}$.



Векторы $d\vec{B}$ от всех $d\vec{l}$ в выбранной точке направлены одинаково (перпендикулярно плоскости, образованной векторами $\left(d\vec{l},\vec{r}\right)$), поэтому можно перейти от векторной суммы к сумме величин

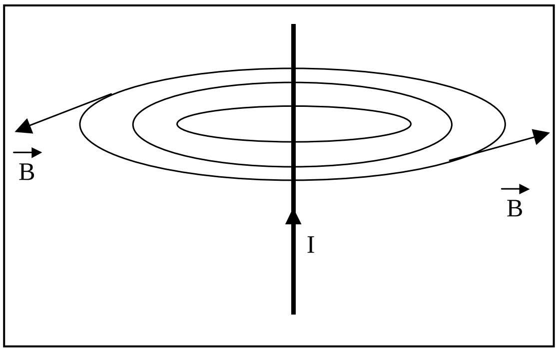
$$B=\sum_{d\vec{l}} dB_{d\vec{l}}, \text{ где } dB_{d\vec{l}}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\,sin\,\alpha}{r^2}$$

Ведём координату *x*, отсчитываемую от точки пересечения провода и перпендикулярного отрезка к проводу, восстановленного из точки наблюдения. Тогда $r=\sqrt{x^2+R^2}$, $r\,sin\,\alpha=R$, $dx=dl$, поэтому

$$B=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IRdx}{r^3}=\frac{\mu_0 IR}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}.$$

Но $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{R^2}$ (см. лекцию № 1).

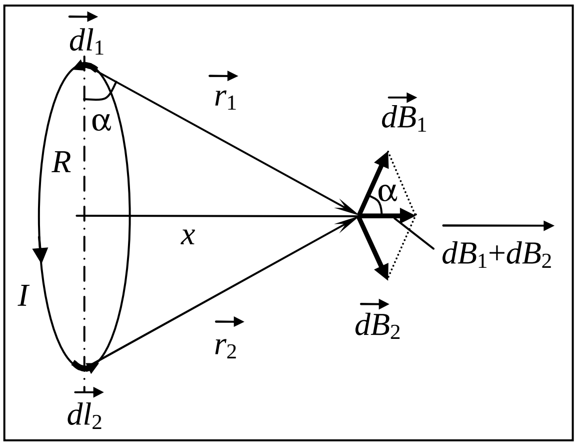
Окончательно, величина индукции магнитного поля на расстоянии *R* от тонкого, длинного прямого провода с постоянным током, определяется соотношением



$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

Силовые линии магнитного поля, создаваемого током в бесконечно длинном прямом проводнике, представляют собой окружности, лежащие в плоскости, перпендикулярной проводу, и с центром на оси провода. Направление вектора $\vec{B}$ определяется по правилу правого винта. (Или *правой руки*: если обхватить правой рукой провод так, чтобы большой палец был направлен по току, то остальные пальцы покажут направление «закрученности» B.)

2) *Рассмотрим магнитное поле, создаваемое круговым контуром с постоянным током на оси контура*.



По контуру течёт ток силой *I*, радиус контура *R*. Найдём величину индукции магнитного поля в точке, находящейся на расстоянии *x* от плоскости контура вдоль оси.

Любые два элемента $d\vec{l}_1$ и $d\vec{l}_2$, расположенные симметрично относительно центра контура, создают в точке наблюдения два симметричных относительно оси вектора $d\vec{B}_1$ и $d\vec{B}_2$. Сумма этих векторов лежит на оси контура. Поэтому при нахождении суперпозиции надо учитывать только проекцию векторов на ось

$$B=\sum_{d\vec{l}} dB_{d\vec{l}}\cos\alpha .$$

Т.к. образующая конуса перпендикулярна касательной к основанию, то угол между векторами $d\vec{l}$ и $\vec{r}$ - прямой, поэтому

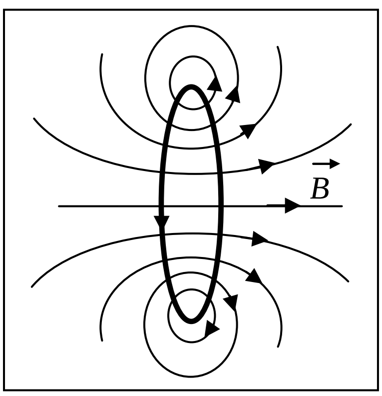
$$dB_{d\vec{l}}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}.$$

Для всех элементов $d\vec{l}$ величины $r=\sqrt{R^2+x^2}$ и $\cos\alpha=\dfrac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}$ одинаковые. Следовательно,

$$B=\sum_{d\vec{l}} dB_{d\vec{l}}\cos\alpha=\sum_{d\vec{l}}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}\cos\alpha=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^2}\cos\alpha\sum_{d\vec{l}} dl=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^2}\cos\alpha 2\pi R$$

или

$$B=\frac{\mu_0}{2}\frac{IR^2}{\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}.$$



С учётом определения магнитного момента контура $\vec{p}_m=IS\vec{n}$ и величины площади круга $S=\pi R^2$, можно записать эту формулу в виде

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I\pi R^2\vec{n}}{\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\vec{p}_m}{\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}.$$

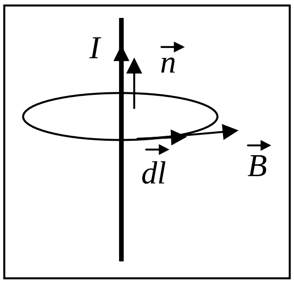
Замечание. Картина силовых линий магнитного поля кольца обладает осевой симметрией, поэтому вектор индукции в каждой точке *плоскости кольца* направлен перпендикулярно этой плоскости. Кроме того, в каждой точке поля вектор $\vec{B}$ лежит в плоскости, проходящей через ось кольца (продольной плоскости).

Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции.

Так как силовые линии магнитного поля замкнутые, то это поле является *вихревым*, т.е. $rot\left(\vec{B}\right)\neq\vec{0}$, поэтому циркуляция этого векторного поля вдоль любого контура Г не равна нулю

$$\oint_\Gamma\left(\vec{B},d\vec{l}\right)=\iint_S\left(rot\left(\vec{B}\right),d\vec{S}\right)\neq 0 .$$

Пример. Найдем циркуляцию вектора магнитной индукции поля, создаваемого прямым проводом с током. В качестве контура Г возьмём какую-нибудь силовую линию (представляющую собой, как нам уже известно, окружность с центром на оси провода и лежащую в плоскости, перпендикулярной к проводу). Пусть радиус этой линии равен R, тогда величина магнитной индукции на этой линии постоянна и равна $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}$. Выберем ориентацию на контуре Г так, чтобы векторы $d\vec{l}$ и $\vec{B}$ были направлены одинаково. (В этом случае нормаль $\vec{n}$ к кругу, ограниченному контуром, и направление тока совпадают.) Тогда



$$\oint_\Gamma\left(\vec{B},d\vec{l}\right)=\oint_\Gamma B\cos\left(0^0\right)dl=\oint_\Gamma Bdl=B\oint_\Gamma dl=B2\pi R=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}2\pi R=\mu_0 I .$$

Выберем ориентацию на силовой линии так, чтобы векторы $\vec{B}$ и $d\vec{l}$ были направлены противоположно, (при этом нормаль $\vec{n}$ к кругу, ограниченному контуром, и направление тока тоже будут направлены противоположно). В этом случае

$$\oint_\Gamma\left(\vec{B},d\vec{l}\right)=\oint_\Gamma B\cos\left(180^0\right)dl=-\oint_\Gamma Bdl=-B\oint_\Gamma dl=-B2\pi R=-\frac{\mu_0 I}{2\pi R}2\pi R=-\mu_0 I .\clubsuit$$

Этот результат не является случайным, его можно обобщить в виде теоремы о циркуляции вектора индукции магнитного поля.

Циркуляция вектора индукции магнитного поля по любому ориентированному замкнутому контуру пропорциональна алгебраической сумме токов, пронизывающих ориентированную площадку, ограниченную контуром. Ориентация контура и площадки согласованы правилом правого винта. Коэффициент пропорциональности – магнитная постоянная.

$$\oint_\Gamma\left(\vec{B},d\vec{l}\right)=\mu_0\sum_k I_k$$

Сила тока берётся со знаком плюс, если угол между направлением тока и направлением нормали к площадке меньше 90 градусов, и минус если больше.

Если ввести векторное поле плотности тока $\vec{j}$ так, чтобы $\sum_k I_k = \iint_S \left(\vec{j}, d\vec{S}\right)$, то используя теорему Стокса

$$\oint_\Gamma \left(\vec{B}, d\vec{l}\right) = \iint_S \left(rot\left(\vec{B}\right), d\vec{S}\right) = \mu_0 \iint_S \left(\vec{j}, d\vec{S}\right),$$

получаем *дифференциальную форму* записи теоремы о циркуляции вектора магнитной индукции

$$rot\left(\vec{B}\right) = \mu_0 \vec{j}.$$

Замечание. Хоть магнитное поле и является вихревым, но отсюда не следует, что циркуляция вектора индукции всегда отлична от нуля. Например, если контур Г охватывает два одинаковых по силе тока, но пронизывающих площадку в разных направлениях, то для них

$$\oint_\Gamma \left(\vec{B}, d\vec{l}\right) = \mu_0 \left(I_1 - I_2\right) = 0, \text{ но } rot\vec{B} \neq \vec{0}.$$

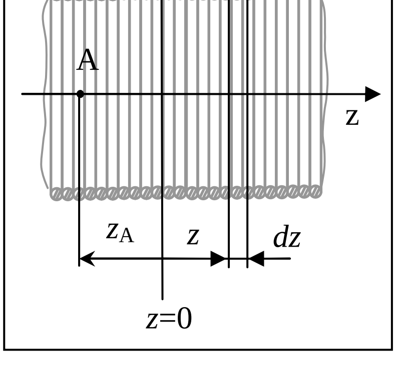
Идеальным соленоидом называется бесконечный тонкий проводник, намотанный на поверхность бесконечного кругового цилиндра так, что при этом круговые витки проводника перпендикулярны оси цилиндра.

Замечание. В таком соленоиде нет составляющей электрического тока, направленной вдоль оси цилиндра, а только круговые токи в каждом из поперечных сечений. Поэтому можно считать, что соленоид составлен из бесконечного числа одинаковых витков, по которым течет одинаковый по направлению и силе ток.

Плотностью намотки соленоида n называется величина, равная отношению количества витков N на некотором участке соленоида к длине этого участка l: $n = \frac{N}{l}$.

Найдем величину индукции магнитного поля в какой-нибудь точке А на оси соленоида. Пусть сила тока в соленоиде равна I. Радиус витков R. Плотность намотки n.

Для нахождения индукции магнитного поля в этой точке, применим принцип суперпозиции для магнитного поля – вектор индукции равен векторной сумме магнитных индукций, создаваемых каждым из колец в отдельности: $\vec{B}_A = \sum_k \vec{B}_k$. Отметим, что все векторы $\vec{B}_k$ в точке А



направлены одинаково – в одну сторону вдоль оси соленоида. Поэтому от векторной суммы можно перейти к сумме длин векторов $B_A = \sum_k B_k$.

Введём вдоль оси соленоида ось z. Выделим в соленоиде какое-то сечение, координату которого примем за ноль (z=0). Пусть точка А имеет координату z_A. Небольшая часть соленоида, длина которой равна dz, и которая находится в сечении с координатой z, содержит количество витков $dN = ndz$. Эта часть создаёт в точке А индукцию магнитного поля, величина которой

$$dB = \frac{\mu_0}{2}\frac{IR^2 dN}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}},$$

где расстояние от точки А до этого сечения равно $x = \left|z - z_A\right|$.

Тогда $B_A = \sum\limits_k B_k = \int\limits_{СОЛЕНОИД} dB = \int\limits_{\substack{ВИТКИ\\СОЛЕНОИДА}} \frac{\mu_0}{2}\frac{IR^2 dN}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}$ или

$$B_A = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_0}{2}\frac{IR^2 ndz}{\left(R^2 + \left(z - z_A\right)^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0 IR^2 n}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{\left(R^2 + \left(z - z_A\right)^2\right)^{3/2}}$$

Делаем замену $y = z - z_A$ и получаем $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{\left(R^2 + \left(z - z_A\right)^2\right)^{3/2}} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{\left(R^2 + y^2\right)^{3/2}} = \frac{2}{R^2}$.

Поэтому величина магнитной индукции на оси идеального соленоида равна

$$B_A = \frac{\mu_0 IR^2 n}{2}\frac{2}{R^2} = \mu_0 In.$$

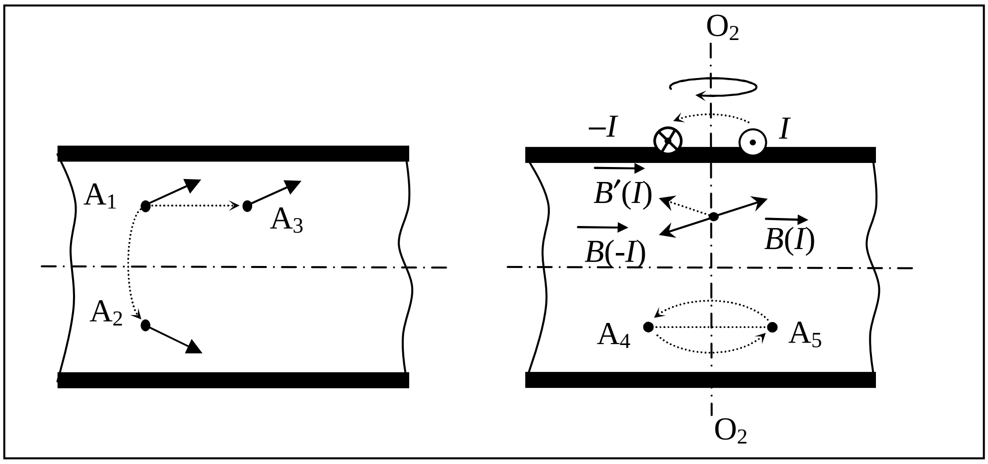
Как видно, она не зависит от радиуса соленоида R.

Обсудим *расположение силовых линий* магнитного поля идеального соленоида (и внутри, и снаружи). Так как магнитное поле идеального соленоида создаётся кольцевыми токами, то вектор индукции в каждой точке поля лежит в продольной плоскости соленоида (любой плоскости, проходящей через ось соленоида).

Докажем, что в произвольных точках A_1, A_2, A_3, находящихся на равном расстоянии от оси соленоида, вектор индукции $\vec{B}$ одинаковый по величине и направлен под одинаковым углом к оси.

1) Пусть точки A_1 и A_2 находятся в одном поперечном сечении. Так как магнитное поле соленоида обладает осевой симметрией, то поворотом вокруг оси можно перенести точку A_1 в A_2 (и наоборот). Векторы, находящиеся в этих точках должны перейти друг в друга (т.к. они принадлежат одному векторному полю).

2) Пусть точки A_1 и A_3 находятся в одном продольном сечении. Так как магнитное поле соленоида обладает симметрией сдвига вдоль оси соленоида, то сдвигом можно перенести точку A_1 в A_3 (и наоборот). Векторы, находящиеся в этих точках должны перейти друг в друга (т.к. они



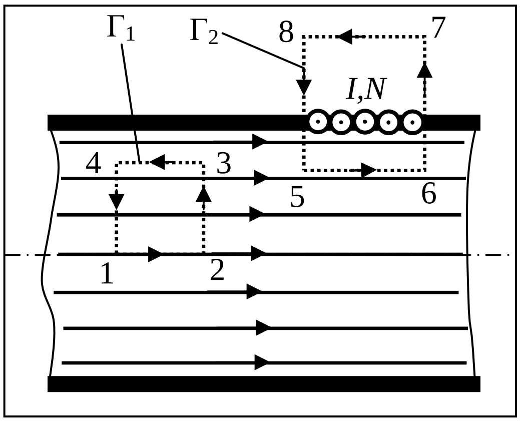
принадлежат одному векторному полю).

Докажем теперь, что вектор индукции магнитного поля соленоида в каждой точке направлен параллельно оси соленоида. Для этого рассмотрим вектор $\vec{B}$ в произвольной точке поля, считая, что он не направлен параллельно оси соленоида. Предположим, что при заданном направлении тока *I* он направлен как $\vec{B}(I)$. Через рассматриваемую точку можно провести ось симметрии O_1O_2 поля соленоида и подвергнуть поле повороту на 180^0 вокруг этой оси. При этом какие-то точки A_4 и A_5, расположенные симметрично относительно этой оси перейдут друг в друга, а вектор $\vec{B}(I)$ перейдет в симметричный вектор $\vec{B}'(I)$, а направление тока *I* в соленоиде поменяется на противоположное –*I*. Но противоположно направленный ток в соленоиде должен создать в рассматриваемой точке противоположно направленный вектор $\vec{B}(-I)$. Поэтому вектору $\vec{B}(I)$ должен соответствовать вектор $\vec{B}(-I)$, не являющийся ему симметричным. Это противоречия можно избежать только в том случае, когда вектор $\vec{B}(I)$ параллелен оси в любой точке магнитного поля идеального соленоида.

Следовательно, силовые линии магнитного поля внутри и снаружи *параллельны оси соленоида*, а величина индукции зависит только от расстояния до оси соленоида.

Теперь рассмотрим циркуляцию индукции векторного поля по некоторому квадратному контуру Γ_1, который расположен целиком внутри соленоида так, что одна его сторона лежит на оси. Пусть длина каждой из сторон контура равна *L*. Тогда

$$\oint_{\Gamma_1}\left(\vec{B},d\vec{l}\right)=\int_{12}\left(\vec{B},d\vec{l}\right)+\cancel{\int_{23}\left(\vec{B},d\vec{l}\right)}+\int_{34}\left(\vec{B},d\vec{l}\right)+\cancel{\int_{41}\left(\vec{B},d\vec{l}\right)}=B_{12}L-B_{34}L=\left(B_{12}-B_{34}\right)L$$



(вычеркнуты нулевые слагаемые). Но контур не охватывает никакие токи, поэтому $\oint\limits_{\Gamma_1}\left(\vec{B},d\vec{l}\right)=0$, откуда $B_{34}=B_{12}=\mu_0 In$. Т.к. величина L является произвольной (но $L<R$), то величина магнитной индукции на любом расстоянии от оси (внутри соленоида) равна величине магнитной индукции на его оси. Таким образом, величина магнитной индукции *внутри* идеального соленоида постоянная и равна

$$B=\mu_0\cdot I\cdot n,$$

где I – сила тока, n – плотность намотки витков. Следовательно, *магнитное поле внутри идеального соленоида является однородным*.

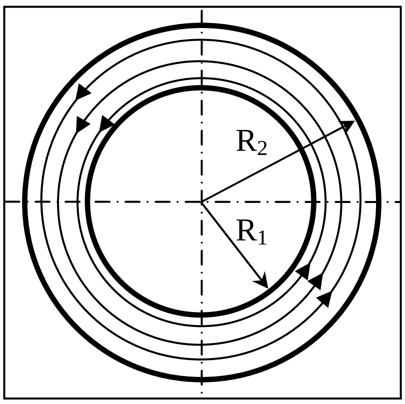
Теперь рассмотрим циркуляцию по квадратному контуру Γ_2, который расположен так, что одна его сторона лежит внутри соленоида параллельно оси, а противоположная - снаружи. Пусть длина каждой из сторон контура равна L. Этот контур охватывает витки, число которых равно N. По виткам текут одинаковые токи в одинаковом направлении, поэтому исходя из ориентации контура и направления токов, получаем

$$\oint\limits_{\Gamma_2}\left(\vec{B},d\vec{l}\right)=\mu_0 NI\ .$$

Но $\oint\limits_{\Gamma_2}\left(\vec{B},d\vec{l}\right)=\int\limits_{56}\left(\vec{B},d\vec{l}\right)+\cancel{\int\limits_{67}\left(\vec{B},d\vec{l}\right)}+\int\limits_{78}\left(\vec{B},d\vec{l}\right)+\cancel{\int\limits_{81}\left(\vec{B},d\vec{l}\right)}=B_{56}L-B_{78}L=\left(B_{56}-B_{78}\right)L$

При этом внутри соленоида $B_{56}=\mu_0 In$. Получаем равенство $\left(\mu_0 In-B_{78}\right)L=\mu_0 NI$, откуда для величины магнитной индукции снаружи соленоида $B_{78}=\mu_0 In-\mu_0\dfrac{N}{L}I$. Плотность намотки витков, по определению, равна $n=\dfrac{N}{L}$, поэтому $B_{78}=0$. *Снаружи идеального соленоида магнитное поле отсутствует*.

У идеального соленоида магнитное поле сосредоточено только внутри соленоида!



Тороид – это тонкий проводник, плотно намотанный на поверхность тора (бублика).

Магнитное поле тороида обладает осевой симметрией, поэтому силовые линии являются концентрическими окружностями, с центрами на оси тороида. Пусть число витков в тороиде равно N, сила тока I. Рассмотрим циркуляцию вектора индукции вдоль контура Г радиуса r ($R_1 < r < R_2$), совпадающего с одной из силовых линий:

$\oint\limits_{\Gamma}\left(\vec{B},d\vec{l}\right) = \mu_0 NI$. Вдоль Г величина В постоянная, поэтому

$\oint\limits_{\Gamma}\left(\vec{B},d\vec{l}\right) = \oint\limits_{\Gamma} Bdl = B\oint\limits_{\Gamma} dl = B\cdot 2\pi r = \mu_0 NI$, откуда внутри тороида $B = \dfrac{\mu_0 NI}{2\pi r}$. Предположим, что диаметр сечения тороидальной части много меньше внутреннего радиуса $d = R_2 - R_1 << R_1$. Если ввести плотность намотки на внутреннем радиусе $n = \dfrac{N}{2\pi R_1}$, то можно записать

$B = \dfrac{\mu_0 NI}{2\pi r} = \dfrac{\mu_0 NI}{2\pi R_1}\dfrac{R_1}{r} = \mu_0 nI\left(\dfrac{r-x}{r}\right) = \mu_0 nI\left(1-\dfrac{x}{r}\right)$, где $0 < x < d$. Так как $x < d << R_1 < r$, то можно приближенно считать индукцию постоянной внутри тороида $B \approx \mu_0 nI$.

Опыт показывает, что в веществе магнитное поле изменяется по сравнению с магнитным полем в вакууме $\vec{B}_0$. Всякое вещество является *магнетиком*, т.е. способно под действием магнитного поля приобретать магнитные свойства (намагничиваться). При этом вещество создаёт собственное магнитное поле $\vec{B}'$, поэтому по принципу суперпозиции в веществе

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'.$$

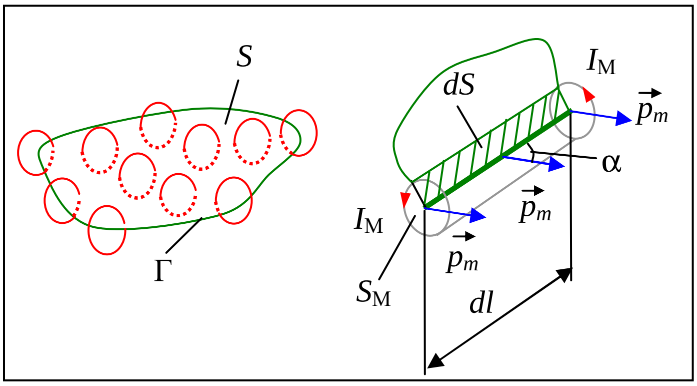
На микроскопическом масштабе внутри вещества магнитное поле сильно изменяется и в пространстве и во времени, поэтому при описании рассматриваются *усреднённые величины*. По классическому представлению, предложенному Ампером, в веществе циркулируют микроскопические круговые токи (атомарные и молекулярные токи), каждый из которых создаёт в окружающем пространстве магнитное поле. В отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты этих токов ориентированы хаотически и их векторная сумма в физически малом объёме равна нулю. При внесении магнетика в магнитное поле магнитные моменты микроскопических токов ориентируются в определённом направлении, поэтому в целом суммарный дипольный момент такого объёма уже не равен нулю.

Для характеристики магнитных свойств вещества вводят *вектор намагниченности вещества* – усреднённый суммарный магнитный момент единицы (физически малого) объёма

$$\vec{J} = \frac{\sum\limits_{\Delta V}\vec{p}_m}{\Delta V},$$

единицы измерения величины намагниченности – А/м (Ампер/метр).

Рассмотрим в веществе теорему о циркуляции $rot\left(\vec{B}\right) = \mu_0\vec{j}_\Sigma$. Суммарное магнитное поле $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$ создаётся суммарной плотностью тока – векторной суммой микроскопических (атомарных и молекулярных) токов и макроскопических токов (вызванных переносом сторонних



зарядов – их называют *токами проводимости* или сторонними токами)

$\vec{j}_\Sigma = \vec{j}_M + \vec{j}_{CT}$.

Так как $rot\left(\vec{B}_0\right) = \mu_0 \vec{j}_{CT}$ и $rot\left(\vec{B}'\right) = \mu_0 \vec{j}_M$, то из выражения $rot\left(\vec{B}\right) = \mu_0\left(\vec{j}_M + \vec{j}_{CT}\right)$ следует, что для определения магнитной индукции в веществе, надо знать плотность молекулярных токов. Оказывается, для вектора намагниченности вещества справедливо соотношение $rot\left(\vec{J}\right) = \vec{j}_M$.

Вывод соотношения $rot\left(\vec{J}\right) = \vec{j}_M$**.**

Выделим внутри вещества (магнетика) какую-то ориентированную (незамкнутую) поверхность *S* и найдем поток плотности молекулярного тока через эту поверхность $\Phi_{j\_M} = \iint\limits_S \left(\vec{j}_M, d\vec{S}\right)$. Те молекулярные токи, которые не охватывают край этой поверхности, будут пронизывать эту поверхность дважды – в прямом и обратном направлении, поэтому их вклад в поток равен нулю $\iint\limits_{S_{ВНУТР}} \left(\vec{j}_M, d\vec{S}\right) = 0$.

Для рассмотрения потока от токов, охватывающих край, выделим настолько малую часть поверхности с примыкающим краем, чтобы все молекулярные токи, которые охватывают край можно было считать одинаково ориентированными. Пусть длина граничной линии этой части равна *dl*. Предположим, что векторы магнитных моментов молекулярных токов направлены под углом α к этой части граничной линии. Выделим косой цилиндр, осью которого является часть граничной линии, а основанием – молекулярный круговой ток, площадь контура которого S_M. Этот цилиндр отсекает от поверхности *S* кусок, площадь которого *dS*. Тогда поток плотности молекулярного тока через этот кусок *dS* равен суммарному молекулярному току всех круговых токов, попавших в цилиндр

$$\Phi_{j\_M} = \iint\limits_{dS} \left(\vec{j}_M, d\vec{S}\right) \approx \left(\vec{j}_M, d\vec{S}\right) = \sum_{ЦИЛИНДР} I_M .$$

Объём цилиндра $V = S_M dl\cos\alpha$, сумма проекций векторов магнитных моментов на ось цилиндра $\sum\limits_{ЦИЛИНДР} p_m \cos\alpha = \sum\limits_{ЦИЛИНДР} I_M S_M \cos\alpha = S_M \cos\alpha \sum\limits_{ЦИЛИНДР} I_M$. Так как $\vec{J} = \dfrac{\sum\limits_V \vec{p}_m}{V}$, то

$$J\cos\alpha = \frac{\sum\limits_{V} p_m \cos\alpha}{V} = \frac{S_M \cos\alpha \sum\limits_{ЦИЛИНДР} I_M}{S_M\, dl \cos\alpha} = \frac{1}{dl}\sum_{ЦИЛИНДР} I_M \ .$$

Поэтому вблизи края поверхности можно записать равенство

$$Jdl\cos\alpha = \sum_{ЦИЛИНДР} I_M = \left(\vec{j}_M, d\vec{S}\right) \text{ или } \left(\vec{J}, d\vec{l}\right) = \left(\vec{j}_M, d\vec{S}\right),$$

где dS – часть поверхности вблизи края. Соответственно, вдоль всего её края Г

$$\oint_{Г}\left(\vec{J}, d\vec{l}\right) = \iint_{S_{КРАЙ}}\left(\vec{j}_M, d\vec{S}\right)$$

Но всю поверхность S можно разбить на две части $S = S_{КРАЙ} + S_{ВНУТР}$. Так как $\iint\limits_{S_{ВНУТР}}\left(\vec{j}_M, d\vec{S}\right) = 0$,

то можно записать равенство

$$\oint_{Г}\left(\vec{J}, d\vec{l}\right) = \iint_{S_{КРАЙ}}\left(\vec{j}_M, d\vec{S}\right) + \iint_{S_{ВНУТР}}\left(\vec{j}_M, d\vec{S}\right) = \iint_{S}\left(\vec{j}_M, d\vec{S}\right)$$

т.е. циркуляция вектора намагниченности вдоль края любой ориентированной поверхности внутри магнетика равна потоку плотности молекулярного тока через эту поверхность.

Используя теорему Стокса $\oint\limits_{Г}\left(\vec{J}, d\vec{l}\right) == \iint\limits_{S}\left(rot\left(\vec{J}\right), d\vec{S}\right)$ можно переписать это равенство в виде

$$\iint_{S}\left(rot\left(\vec{J}\right), d\vec{S}\right) = \iint_{S}\left(\vec{j}_M, d\vec{S}\right)$$

откуда следует *дифференциальная форма* теоремы о циркуляции $rot\left(\vec{J}\right) = \vec{j}_M$. ♣

Подставив это соотношение в равенство $rot\left(\vec{B}\right) = \mu_0\left(\vec{j}_M + \vec{j}_{СТ}\right)$, получим

$$rot\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right) = rot\left(\vec{J}\right) + \vec{j}_{СТ} \text{ или } rot\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}\right) = \vec{j}_{СТ}.$$

Ведём вектор напряжённости магнитного поля

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$$

(единицы измерения А/м (Ампер/метр)), тогда для вектора напряжённости магнитного поля получаем теорему *о циркуляции вектора напряженности магнитного поля в дифференциальной форме*

$$rot\left(\vec{H}\right) = \vec{j}_{СТ}$$

откуда можно получить теорему *о циркуляции вектора напряженности магнитного поля* в интегральной форме. Пусть $\sum\limits_{k} I_{СТ\_k} = \iint\limits_{S}\left(\vec{j}_{СТ}, d\vec{S}\right)$ - алгебраическая сумма сторонних токов (токов проводимости), пронизывающих некоторую незамкнутую ориентированную поверхность внутри магнетика, тогда

$$\oint_{\Gamma}\left(\vec{H},d\vec{l}\right)=\sum_{k}I_{CT\_k},$$

т.е. циркуляция вектора напряжённости магнитного поля вдоль края любой ориентированной поверхности внутри магнетика равна алгебраической сумме токов проводимости через эту поверхность.

Правило знаков для тока остаётся прежним: если направление тока через площадку составляет с вектором нормали к площадке угол, меньший 90^0, то знак положительный, если больше – то отрицательный.

В однородном изотропном магнетике (для слабых полей) векторы намагниченности и напряжённости совпадают по направлению

$$\vec{J}=\chi\vec{H},$$

где безразмерный коэффициент χ носит название *магнитная восприимчивость вещества*.

Поэтому выражение $\vec{H}=\dfrac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{J}$ в однородном изотропном магнетике можно записать в виде

$$\vec{B}=\mu_0\left(\vec{H}+\vec{J}\right)=\mu_0\left(\vec{H}+\chi\vec{H}\right)=\mu_0\left(1+\chi\right)\vec{H}$$

Величину $\mu=1+\chi$ имеет название *относительная магнитная проницаемость вещества*.

Поэтому в однородном изотропном магнетике для индукции поля и напряжённости

$$\vec{B}=\mu_0\mu\vec{H}.$$

Магнитные свойства магнетиков.

Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что все магнетики можно (условно) разделить на три группы.

1) *Диамагнетики* – это магнетики, у которых магнитная восприимчивость принимает отрицательные значения, но при этом выполняется $0<\mu=1+\chi<1$.

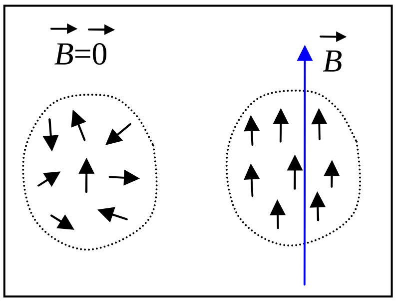
Так как $\vec{J}=\chi\vec{H}=\chi\left(\dfrac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{J}\right)$, откуда $\vec{J}=\dfrac{\chi}{1+\chi}\cdot\dfrac{\vec{B}}{\mu_0}$, то у диамагнетиков вектор намагниченности направлен против вектора индукции магнитного поля.

Диамагнетики выталкиваются из области сильного магнитного поля.

2) *Парамагнетики* – магнетики, у которых у которых магнитная восприимчивость положительна, но не принимает больших значений. Вектор намагниченности сонаправлен с вектором индукции.

3) *Ферромагнетики* – вещества, магнитная проницаемость которых достигает больших значений (тысячи и более). Намагниченность ферромагнетиков зависит от их предыдущего состояния (гистерезис).

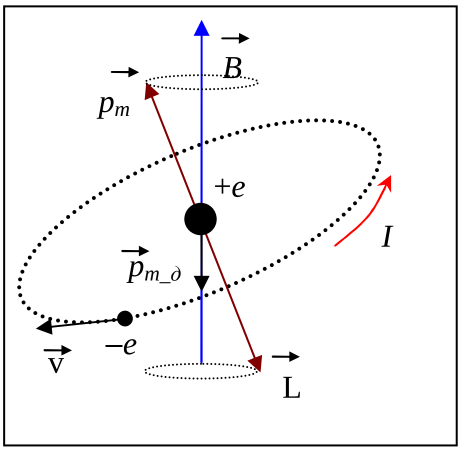
Физическая природа диа- и парамагнетизма.



Согласно гипотезе Ампера магнитные свойства вещества обусловлены микроскопическими токами, циркулирующими внутри вещества. По классическим представлениям эти токи создаются движущимися зарядами в атомах. Классическое рассмотрение позволяет качественно объяснить магнитные свойства вещества без значительного усложнения модели, поэтому будем считать, что точечный отрицательно заряженный электрон движется по круговой орбите вокруг ядра. Это приводит к появлению кругового тока, положительное направление которого противоположно направлению движения электрона. В магнитном поле магнитные моменты микроскопических токов ориентируются преимущественно вдоль силовой линии магнитного поля. На магнитный момент микроскопических токов в магнитном поле действует момент сил, поэтому орбита электрона начнет прецессировать, и появится дополнительный вектор магнитного момента $\vec{p}_{m\_\partial}$, направленный против вектора индукции $\vec{B}$.

Таким образом, при внесении атома в магнитного поле, у него появится дополнительный магнитный момент.

Если в отсутствии магнитного поля суммарный магнитный момент атома (сумма момента электронов и ядра) был нулевым, то после внесения в магнитное поле появившийся магнитный момент будет направлен против вектора индукции внешнего поля. Следовательно, и вектор намагниченности малого объёма – тоже. Такие вещества относятся к классу диамагнетиков.



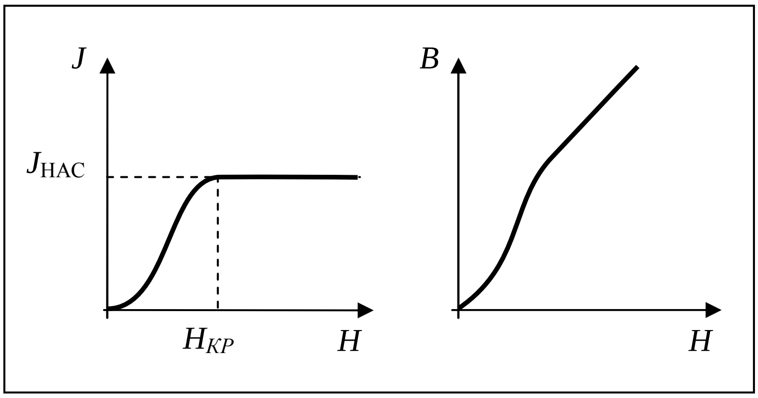
Пусть в отсутствии магнитного поля суммарный магнитный момент атома был ненулевым. Опыт показывает, что величина дополнительного момента меньше собственного момента атома, поэтому после внесения суммарный момент ориентируется вдоль силовой линии внешнего поля, и вектор намагниченности будет направлен по вектору индукции. Такие вещества относятся к классу парамагнетиков. Для парамагнетиков магнитная восприимчивость зависит от температуры по закону Кюри

$$\chi = \frac{C}{T},$$

C – постоянная Кюри, зависящая от рода вещества, T – температура.

Ферромагнетики – вещества, способные обладать намагниченностью в отсутствие внешнего магнитного поля. Типичный представитель – железо (а также никель, кобальт и сплавы на их основе). Величина намагниченности ферромагнетиков значительно превосходит намагниченность диа- и парамагнетиков.

У ферромагнетиков состояние намагниченности зависит от предыдущего состояния. Это явление называется магнитный *гистерезис* (от греческого слова, означающего «отстающий»).



При магнитном гистерезисе вектор намагничивания и вектор напряженности магнитного поля в веществе зависит не только от приложенного внешнего поля, но и от предыстории данного образца. Именно магнитным гистерезисом объясняется существование *постоянных магнитов*.

Пусть начальное намагничивание в ферромагнетике отсутствовало. Опыт показывает, что при увеличении напряженности магнитного поля намагниченность начинает нелинейно возрастать до некоторой величины – значения насыщения намагниченности.

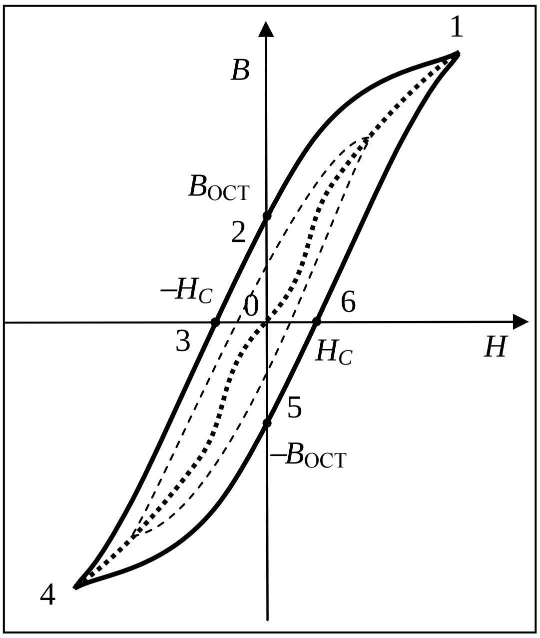
Следовательно, магнитная восприимчивость для ферромагнетиков зависит от величины напряжённости $\chi = \frac{J}{H}$. При увеличении *H* величина χ стремится к нулю.

Суммарная индукция в веществе

$$\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{J}\right)$$

тоже будет нелинейно зависеть от напряженности пока у намагниченности не наступит насыщения.

Рассмотрим процесс, в котором напряженность магнитного поля циклически изменяется. Если сначала намагничивания не было, то величина индукции поля увеличивается, например, до точки 1 по основной кривой намагничивания 0-1. Далее, при уменьшении напряжённости зависимость *B*(*H*) изображается кривой 1-2-3-4. Точке 2 соответствует нулевая напряжённость внешнего магнитного поля, но при этом у вещества наблюдается остаточное магнитное поле величина индукции которого $B_{ОСТ}$. Образец магнетика становится постоянным магнитом.



Для размагничивания образца потребуется создать магнитное поле (точка 3), вектор напряженности которого направлен в противоположном направлении вектору в состоянии 1. Величина такой напряженности называется *коэрцитивной силой* H_C. При дальнейшем увеличении напряженности индукция нелинейно возрастает до выхода на кривую насыщения (точка 4). Уменьшение напряженности приводит к зависимости $B(H)$, соответствующему участку кривой 4-5-6-1.

Таким образом, намагничивание ферромагнетика зависит от его предыдущего состояния (предыстории), поэтому зависимость $B(H)$ неоднозначная. Следовательно, у ферромагнетиков понятие магнитной проницаемости относится только к основной кривой намагничивания 0-1.

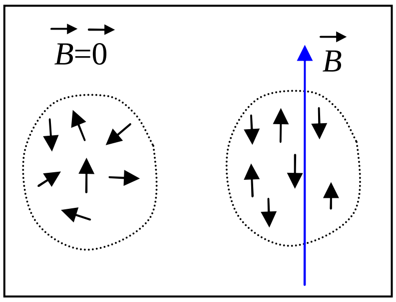
Замкнутая кривая $B(H)$ называется петлёй гистерезиса. Если крайние точки находятся на кривой насыщения, то петля называется предельной (максимальной).

Интеграл $A = \oint\limits_{петля} BdH$ равен работе, затрачиваемой на перемагничивание ферромагнетика за полный цикл изменения напряженности магнитного поля.

Явление гистерезиса объясняется наличием у ферромагнетиков особых областей - *доменов*. В каждом домене, даже в отсутствие внешнего поля, магнитные моменты атомы ориентированы одинаково благодаря *обменному* взаимодействию между атомами и наблюдается спонтанное намагничивание вещества до состояния насыщения. Размеры доменов порядка микрометра ($\sim 10^{-6}$ м). При отсутствии намагниченности результирующие магнитные моменты каждого домена ориентированы хаотически, поэтому в целом суммарная намагниченность равна нулю. При наличии внешнего поля происходит ориентация доменов вдоль направления поля, в результате чего размеры областей спонтанного намагничивания начинают меняться – одни, направление моментов в которых совпадает с направлением поля, увеличиваются, другие уменьшаются. Этот процесс протекает *необратимым* образом, что является причиной гистерезиса.

Для ферромагнетиков существует температура, которая называется *точкой Кюри*, при которой они теряют ферромагнитные свойства и становятся парамагнетиками. Для железа T_C=1043 К, для Никеля T_C=627 К. При $T > T_C$ магнитная восприимчивость зависит от температуры по закону Кюри-Вейса $\chi = \dfrac{C}{T - T_C}$.

Замечание. 1) *Антиферромагнетизм* - это одно из магнитных состояний вещества, при котором



магнитные моменты микроскопических токов вещества ориентированы навстречу друг другу (антипараллельно), и поэтому намагниченность тела в целом очень мала. Этим антиферромагнетизм отличается от ферромагнетизма. *Точка Неля* – температура T_N, выше которой антиферромагнетик теряет свои свойства. Например, для химических соединений

FeO T_N=190 K, а у NiO T_N=650 K.

2) *Ферриты* - химические соединения оксида железа Fe_2O_3 с оксидами других металлов, обладающие уникальными магнитными свойствами, сочетающие высокую намагниченность и полупроводниковые или диэлектрические свойства, благодаря чему они получили широкое применение как магнитные материалы в радиотехнике, радиоэлектронике. Из-за уникального сочетания высоких магнитных свойств и низкой электропроводности ферриты не имеют конкурентов среди других магнитных материалов в технике высоких частот (более 100 кГц).