Лекция 11. Электромагнитные волны.

Волновое уравнение для электромагнитного поля, его общее решение. Распространения электромагнитных волн. Энергия и импульс электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга. Теорема Пойнтинга.

Рассмотрим уравнения Максвелла в вакууме, в условиях отсутствия зарядов и токов. При ρ=0, $\vec{j}=\vec{0}$, ε=1, μ=1 уравнения в дифференциальной форме примут вид

$$div\vec{D}=0,\ rot\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\ div\vec{B}=0,\ rot\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}.$$

Учитываем материальные уравнения $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}$, $\vec{B}=\mu_0\vec{H}$ и получаем систему уравнений

$$div\left(\vec{E}\right)=0 \qquad (1)$$

$$rot\vec{E}=-\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \qquad (2)$$

$$div\left(\vec{H}\right)=0 \qquad (3)$$

$$rot\vec{H}=\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad (4)$$

Начинаем преобразования уравнений (2) и (4): $\frac{\partial}{\partial t}\left(rot\vec{E}\right)=-\mu_0\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$, откуда

$$rot\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=-\mu_0\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} \qquad (5)$$

Т.к. из (4) следует, что $\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\frac{1}{\varepsilon_0}rot\vec{H}$, то равенство (5) примет вид $rot\left(\frac{1}{\varepsilon_0}rot\vec{H}\right)=-\mu_0\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$ или

$$rot\left(rot\vec{H}\right)=-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} \qquad (6)$$

Но, как известно из предыдущей лекции $rot\left(rot\left(\vec{H}\right)\right)=grad\left(div\left(\vec{H}\right)\right)-\Delta\vec{H}$, поэтому с учётом (3), уравнение (6) равносильно уравнению

$$\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\Delta\vec{H}=\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} \qquad (7)$$

Аналогичные преобразования можно провести для вектора $\vec{E}$: из (2) следует $\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=-\frac{1}{\mu_0}rot\vec{E}$,

из (4) следует $\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(rot\left(\vec{H}\right)\right)=rot\left(\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)=rot\left(-\frac{1}{\mu_0}rot\vec{E}\right)=-\frac{1}{\mu_0}rot\left(rot\vec{E}\right)$, Учитывая (1), получаем $rot\left(rot\left(\vec{E}\right)\right)=grad\left(div\left(\vec{E}\right)\right)-\Delta\vec{E}=-\Delta\vec{E}$, поэтому

$$\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\Delta\vec{E}=\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \tag{8}$$

Полученные уравнения (7) и (8) имеют вид волнового уравнения – они описывают распространение плоских *электромагнитных* волн. Сразу можно сказать, что *фазовая скорость электромагнитной* волны в вакууме равна $c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\approx 3\cdot 10^8$ м/с и совпадает со значением скорости света в вакууме. При распространении электромагнитных волн в среде с постоянными значениями ε и μ, выражение для фазовой скорости примет вид $v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=\frac{c}{n}$, где величина $n=\sqrt{\varepsilon\mu}$ называется *показателем преломления* среды.

Замечание. Предположение о постоянстве значений ε и μ приводит к расхождению с опытными значениями показателя преломления. Например, для воды ε≈81 и μ≈1, что даёт расчётное значение $n\approx 9$. Однако, экспериментально определено значение $n\approx 1{,}5$. Расхождение объясняется возможной зависимостью ε и μ от частоты и других параметров волны.

Волновое уравнение является линейным, в том смысле, что любая линейная комбинация решений тоже является решением. Отсюда, как известно из предыдущего семестра, следует принцип *суперпозиции для волновых полей* – наложение волновых полей является волновым полем. Поэтому выделяют «простейшие» волновые поля – поля (или волны), соответствующие определённым частотам. Такие «простейшие» волны, определенная частота которых постоянная, называются *монохроматическими*.

Пример. Электромагнитная волна, частоты колебаний векторов в которой равны 1000 Гц и 2000 Гц является суперпозицией двух *монохроматических волн* с частотами 1000 Гц и 2000 Гц.♣

В декартовых координатах волновые уравнения (7) и (8) имеют вид

$$\begin{cases} v^2\left(\frac{\partial^2 H_X}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_X}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H_X}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial^2 H_X}{\partial t^2} \\ v^2\left(\frac{\partial^2 H_Y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_Y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H_Y}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial^2 H_Y}{\partial t^2} \\ v^2\left(\frac{\partial^2 H_Z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_Z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H_Z}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial^2 H_Z}{\partial t^2} \end{cases},\quad \begin{cases} v^2\left(\frac{\partial^2 E_X}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_X}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_X}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial^2 E_X}{\partial t^2} \\ v^2\left(\frac{\partial^2 E_Y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_Y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_Y}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial^2 E_Y}{\partial t^2} \\ v^2\left(\frac{\partial^2 E_Z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_Z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_Z}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial^2 E_Z}{\partial t^2} \end{cases}$$

Эти уравнения описывают распространение плоских волн. Пример записи решения для первых уравнений каждой из систем

$$H_X=H_{0X}\,sin\left(\omega_H t\mp\left(\vec{k}_H,\vec{r}\right)+\alpha_H\right),\ E_X=E_{0X}\,sin\left(\omega_E t\mp\left(\vec{k}_E,\vec{r}\right)+\beta_H\right)$$

(индекс «*E*» соответствует параметрам напряженности электрического поля, а «*H*» - магнитного). В соответствующей волне:

$$\left(\vec{k},\vec{r}\right)=k_x x+k_y y+k_z z\,,$$

$\vec{r}=\left(x,y,z\right)$ - радиус-вектор точки, а для координат волнового вектора $\vec{k}=\left(k_x,k_y,k_z\right)$ справедливо соотношение

$$k=\left|\vec{k}\right|=\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}=\frac{\omega}{v}.$$

Знак «–» соответствует «убегающей» волне, а знак «+» - «набегающей».

Обратим внимание на тот факт, что волновые уравнения для каждой из координат векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ независимы друг от друга, поэтому общее решение можно рассматривать как *суперпозицию* решений для координат векторов. При этом решения волновых уравнений согласованы. Т.е. определённому решению одного из волновых уравнений для какой-то координаты вектора напряжённости электрического поля соответствует определённое решение одного из волновых уравнений для координат вектора напряжённости магнитного поля, и наоборот.

Например, нужно найти решения, соответствующие, вектору $\vec{E}=\left(E_X,E_Y,E_Z\right)$. Но согласно принципу суперпозиции волновых полей, решение, соответствующее вектору $\vec{E}=\left(E_X,E_Y,E_Z\right)$ можно найти как суперпозицию решений, соответствующих векторам $\vec{E}_1=\left(E_X,0,0\right)$, $\vec{E}_2=\left(0,E_Y,0\right)$, $\vec{E}_3=\left(0,0,E_Z\right)$. Аналогично, можно искать решения по вектору напряжённости магнитного поля $\vec{H}=\left(H_X,H_Y,H_Z\right)$.

Пример. Найдем решения для случая, когда волна движется вдоль оси z, а вектор напряжённости электрического поля имеет координаты $\vec{E}=\left(E_X,0,E_Z\right)$, зависящие только от z. Волна в этом случае является суперпозицией волновых полей векторов $\vec{E}_1=\left(E_X,0,0\right)$ и $\vec{E}_3=\left(0,0,E_Z\right)$.
Система волновых уравнений в декартовых координатах примет вид

$$\begin{cases} v^2\dfrac{\partial^2 E_X}{\partial z^2}=\dfrac{\partial^2 E_X}{\partial t^2} \\ v^2\dfrac{\partial^2 E_Z}{\partial z^2}=\dfrac{\partial^2 E_Z}{\partial t^2} \end{cases}$$

Так как ищем решения в виде волны, то предполагаем, что в рассматриваемой области нет постоянных во времени электрического и магнитного полей. Т.е. если при решении получается постоянное значение какой-то координаты векторов $\vec{E}$ или $\vec{H}$, то это значение можно считать равным нулю.

Уравнение (1) $div\left(\vec{E}\right)=0$ примет вид $\dfrac{\partial E_Z}{\partial z}=0$, откуда E_Z не зависит от координат, но, возможно, зависит от времени. Но эта координата должна также удовлетворять волновому уравнению $v^2\dfrac{\partial^2 E_Z}{\partial z^2}=\dfrac{\partial^2 E_Z}{\partial t^2}=0$. Откуда $E_Z=A_1t+A_2$ - линейная функция времени, но так как ищем решения в виде волны, то $A_1=0$, поэтому $E_Z=const$ - т.е. поле постоянное, откуда $E_Z=0$.

Из уравнения (2) $rot\vec{E}=-\mu_0\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}$, с учётом $E_Z=0$ следует

$$\begin{vmatrix}\vec{e}_X & \vec{e}_Y & \vec{e}_Z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ E_X & 0 & 0\end{vmatrix}=-\mu_0\left(\frac{\partial H_X}{\partial t}\vec{e}_X+\frac{\partial H_Y}{\partial t}\vec{e}_Y+\frac{\partial H_Z}{\partial t}\vec{e}_Z\right).$$

Остаются равенства $\dfrac{\partial H_X}{\partial t}=0,\quad \dfrac{\partial E_X}{\partial z}=-\mu_0\dfrac{\partial H_Y}{\partial t},\quad \dfrac{\partial E_X}{\partial y}=-\mu_0\dfrac{\partial H_Z}{\partial t}$.

Координата H_X не зависит от времени, но, так как она должна являться решением волнового уравнения $v^2\left(\dfrac{\partial^2 H_X}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 H_X}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 H_X}{\partial z^2}\right)=\dfrac{\partial^2 H_X}{\partial t^2}$, то $H_X=const$, поэтому $H_X=0$.

Искомые координаты векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ зависят только от z, следовательно, должно быть $\dfrac{\partial E_X}{\partial y}=0$, поэтому из третьего равенства следует $\dfrac{\partial H_Z}{\partial t}=0$ и, по аналогии, $H_Z=0$

Уравнение (3) $div\left(\vec{H}\right)=0$ примет вид $\dfrac{\partial H_Y}{\partial y}=0$. Уравнение (4) $rot\vec{H}=\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

$$\begin{vmatrix}\vec{e}_X & \vec{e}_Y & \vec{e}_Z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 0 & H_Y & 0\end{vmatrix}=\varepsilon_0\frac{\partial E_X}{\partial t}\vec{e}_X$$

даёт соотношение $-\dfrac{\partial H_Y}{\partial z}=\varepsilon_0\dfrac{\partial E_X}{\partial t}$. Получаем систему $\begin{cases}\dfrac{\partial E_X}{\partial z}=-\mu_0\dfrac{\partial H_Y}{\partial t}\\ -\dfrac{\partial H_Y}{\partial z}=\varepsilon_0\dfrac{\partial E_X}{\partial t}\end{cases}$,

откуда можно опять получить волновые уравнения $v^2\dfrac{\partial^2 H_Y}{\partial z^2}=\dfrac{\partial^2 H_Y}{\partial t^2}$ и $v^2\dfrac{\partial^2 E_X}{\partial z^2}=\dfrac{\partial^2 E_X}{\partial t^2}$.

Следовательно, вектору напряжённости электрического поля $\vec{E}_1=\left(E_X,0,0\right)$ соответствует вектор напряженности магнитного поля $\vec{H}_2=\left(0,H_Y,0\right)$. Поэтому вектору $\vec{E}_2=\left(0,E_Y,0\right)$ будет соответствовать вектор $\vec{H}_1=(H_X,0,0)$. Но векторам $\vec{E}_3=(0,0,E_Z)$ и $\vec{H}_3=(0,0,H_Z)$ не соответствует *никакая плоская* электромагнитная волна, распространяющая вдоль оси Z.

Заключение по результатам примера.

1) *Плоская электромагнитная волна является поперечной.*

Действительно, из примера следует, что продольные составляющие (вдоль направления движения волны - оси Z) векторов напряжённостей электрического и магнитного полей равны нулю $E_Z=0$ и $H_Z=0$.

Векторы $\vec{E}=(E_X,0,0)$ и $\vec{H}=(0,H_Y,0)$ направлены перпендикулярно друг другу и перпендикулярно направлению движения волны. Если направление движения волны вдоль оси Z задать волновым вектором $\vec{k}=(0,0,k)$, то можно сказать что тройка векторов $(\vec{E},\vec{H},\vec{k})$ является *правой*.

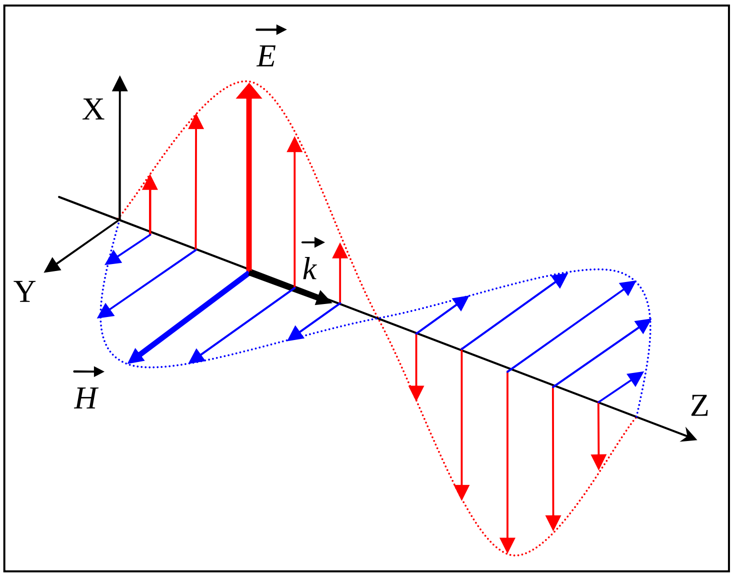
2) *Колебания напряженностей электрического и магнитного полей в любой точке плоской волны происходят с одинаковой фазой.*

Действительно, пусть решения волновых уравнений имеют вид

$$E_X=E_0\,sin(\omega_E t\mp k_E z+\beta_E),\ H_Y=H_0\,sin(\omega_H t\mp k_H z+\alpha_H).$$

Тогда, например, из равенства $\frac{\partial E_X}{\partial z}=-\mu_0\frac{\partial H_Y}{\partial t}$ следует, что

$$\mp k_E E_0\,cos(\omega_E t\mp k_E z+\beta_E)=-\mu_0\omega_H H_0\,cos(\omega_H t\mp k_H z+\alpha_H).$$



Это равенство возможно, только если фазы волн равны с точностью до π. Откуда $\omega_E=\omega_H$, т.е. колебания происходят с одинаковой частотой, и, так как фазовые скорости одинаковые, то равны и волновые числа $k_E=k_H$.

Из равенства амплитуд $k_E E_0 = \mu_0 \omega_H H_0$ следует соотношение $H_0 = \frac{k_E}{\mu_0} E_0 = \frac{\omega_E}{\omega_H}\frac{1}{\mu_0 v} E_0$. Но фазовая скорость волны (в вакууме) $v = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$, поэтому $H_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{\mu_0} E_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0$.

При распространении плоской электромагнитной волны в среде с постоянными значениями ε *и* μ, *величины напряженностей магнитного и электрического полей связаны соотношением*

$$H = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} E .$$

Отношение амплитуд напряжённостей электрического и магнитного полей называется *волновым сопротивлением среды* $Z_0 = \frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}$. Единица измерения Ом.

Для вакуума (ε=1, μ=1) $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx \sqrt{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 36\pi\cdot 10^{9}} = 120\pi \approx 377$ Ом.

Объёмная плотность энергии в плоской волне равна сумме объёмных плотностей энергии электрического и магнитного полей

$$w = w_Э + w_М .$$

Из соотношения амплитуд следует, что объёмные плотности энергии электрического и магнитного полей в плоской волне равны друг другу. Действительно,

$$w_М = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{\mu\mu_0}{2}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} E\right)^2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = w_Э .$$

Таким образом, энергия плоской волны равномерно распределена на электрическую и магнитную части. По аналогии с МКТ, иногда говорят, что плоская электромагнитная волна обладает *двумя степенями свободы*. Поэтому $w = w_Э + w_М = \mu\mu_0 H^2 = \varepsilon\varepsilon_0 E^2$. Или

$$w = \varepsilon\varepsilon_0 E_0^2 \sin^2\left(\omega t \mp kz + \alpha\right) = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E_0^2}{2}\left(1 - \cos\left(2\left(\omega t \mp kz + \alpha\right)\right)\right),$$

объёмная плотность энергии в плоской электромагнитной волне тоже является плоской волной, но с удвоенной частотой. Фазовая скорость *волны энергии* равна $v_Э = \frac{\omega_Э}{k_Э} = \frac{2\omega}{2k} = v$ фазовой скорости электромагнитной волны. Средняя плотность энергии, переносимая плоской электромагнитной волной $< w >= \frac{1}{2}\mu\mu_0 H_0^2 = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E_0^2$.

Вектор Пойнтинга

Изменение объёмной плотности энергии электромагнитного поля в данной точке равно

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\varepsilon\varepsilon_0\left(\vec{E},\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)+\mu\mu_0\left(\vec{H},\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right).$$

Воспользуемся уравнениями Максвелла

$$rot\left(\vec{E}\right)=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}=-\mu\mu_0\frac{\partial \vec{H}}{\partial t},\quad rot\left(\vec{H}\right)=\vec{j}+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}=\vec{j}+\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Откуда

$$\mu\mu_0\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}=-rot\left(\vec{E}\right),\ \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}=rot\left(\vec{H}\right)-\vec{j}.$$

Тогда

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\left(\vec{E},\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)+\left(\vec{H},\mu\mu_0\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right)=\left(\vec{E},\left(rot\left(\vec{H}\right)-\vec{j}\right)\right)-\left(\vec{H},rot\left(\vec{E}\right)\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\left(\vec{E},rot\left(\vec{H}\right)\right)-\left(\vec{H},rot\left(\vec{E}\right)\right)-\left(\vec{E},\vec{j}\right).$$

Используем оператор «набла»:

$$\left(\vec{E},rot\left(\vec{H}\right)\right)-\left(\vec{H},rot\left(\vec{E}\right)\right)=\left(\vec{E},\left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right)\right)-\left(\vec{H},\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\right).$$

Т.к. оператор «набла» - это оператор дифференцирования и для любого произведения

$$\vec{\nabla}(f\cdot g)=g\cdot\vec{\nabla}(f)+f\cdot\vec{\nabla}(g),$$

то $\left(\vec{\nabla},\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\right)=-\left(\vec{E},\left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right)\right)+\left(\vec{H},\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\right)$,

т.е.

$$\left(\vec{E},rot\left(\vec{H}\right)\right)-\left(\vec{H},rot\left(\vec{E}\right)\right)=-div\left(\vec{E}\times\vec{H}\right).$$

Поэтому

$$\frac{\partial w}{\partial t}=-div\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)-\left(\vec{E},\vec{j}\right).$$

Проинтегрируем это выражение по объёму некоторой области V, в которой есть электромагнитное поле:

$$-\iiint\limits_V\frac{\partial w}{\partial t}dV=\iiint\limits_V div\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)dV+\iiint\limits_V\left(\vec{E},\vec{j}\right)dV.$$

Если область не движется, то $\iiint\limits_V\frac{\partial w}{\partial t}dV=\frac{d}{dt}\iiint\limits_V wdV=\frac{dW}{dt}$, где $W=\iiint\limits_V wdV$ - энергия электромагнитного поля в области *V*. По закону Ома $\vec{j}=\gamma\vec{E}$ или $\vec{E}=\rho\vec{j}$, где $\rho=\frac{1}{\gamma}$ - удельное сопротивление среды. Поэтому выражение $\left(\vec{E},\vec{j}\right)=\left(\rho\vec{j},\vec{j}\right)=\rho j^2$ - это дифференциальная форма закона Джоуля-Ленца. Тогда

$$\iiint\limits_V \left(\vec{E},\vec{j}\right)dV = \iiint\limits_V \rho j^2 dV = \frac{d\tilde{Q}}{dt}$$

- мощность выделения теплоты (по закону Джоуля-Ленца) в области V.

По теореме Остроградского-Гаусса $\iiint\limits_V div\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)dV = \oiint\limits_S \left(\left(\vec{E}\times\vec{H}\right),d\vec{S}\right)$,

где S – ориентированная наружу поверхность, являющаяся границей области V.

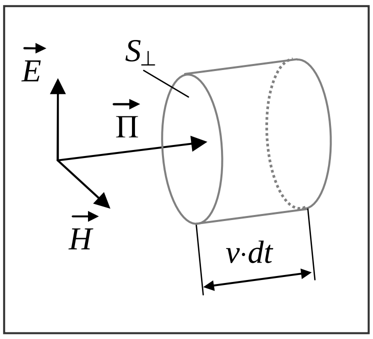
Вектор $\vec{\Pi} = \left(\vec{E}\times\vec{H}\right)$ (П - буква «пи») называется *вектором Пойнтинга* (Джон Генри Пойнтинг - британский физик (1852 - 1914)). Окончательно получим равенство, называемое <u>теоремой Пойнтинга</u>

$$-\frac{dW}{dt} = \oiint\limits_S \left(\vec{\Pi},d\vec{S}\right) + \frac{d\tilde{Q}}{dt}.$$

Скорость изменения энергии электромагнитного поля в некоторой области равна, с обратным знаком, сумме мощности выделения теплоты (по закону Джоуля-Ленца) и потока вектора Пойнтинга через границу области, ориентированную наружу.

Если в области нет тепловыделения $\frac{d\tilde{Q}}{dt} = 0$, то в случае, когда векторное поле $\vec{\Pi}$ на границе S направлено внутрь области, поток отрицателен $\oiint\limits_S \left(\vec{\Pi},d\vec{S}\right) < 0$, а $\frac{dW}{dt} > 0$ - энергия области увеличивается. И наоборот, если поток вектора Пойнтинга направлен наружу из области V, т.е. $\oiint\limits_S \left(\vec{\Pi},d\vec{S}\right) > 0$, то $\frac{dW}{dt} < 0$ - энергия в области убывает.

Рассмотрим область, в которой распространяется плоская электромагнитная волна.



Предположим, что в области нет выделения теплоты по закону Джоуля-Ленца. Выделим в области *малую* площадку $S_\perp$, перпендикулярную вектору Пойнтинга и найдём поток вектор Пойнтинга через эту площадку за малое время dt. Так как скорость распространения волны объёмной плотности энергии равна фазовой скорости электромагнитной волны v, то количество энергии, прошедшей через площадку равно энергии в объёме прямого цилиндра с площадью основания $S_\perp$ и высотой vdt:

$$\oiint\limits_{S_{цил}} \left(\vec{\Pi},d\vec{S}\right) = -\frac{dW}{dt} = -\frac{wdV}{dt} = -\frac{wS_\perp vdt}{dt} = -wvS_\perp$$

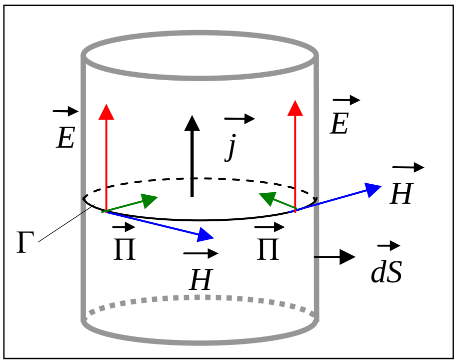
Поверхность цилиндра ориентирована наружу, а вектор Пойнтинга направлен внутрь цилиндра, поэтому $\oint\!\!\oint_{S_{ЦИЛ}} \left(\vec{\Pi}, d\vec{S}\right) = -\Pi S_{\perp}$. Тогда из равенства $-\Pi S_{\perp} = -wvS_{\perp}$ следует $\Pi = wv$. В векторном виде можно записать равенство

$$\vec{\Pi} = w\vec{v} .$$

(Из этой формулы следует, что вектор Пойнтинга направлен по движению волны.)

Следовательно, вектор Пойнтинга – это вектор Умова-Пойнтинга, соответствующий электромагнитной волне. Поэтому физический смысл вектора Пойнтинга состоит в том, что он указывает направление потока энергии, а его величина равна плотности мощности потока энергии.

Пример. Рассмотрим часть цилиндрического проводника длиной l и площадью поперечного сечения $S_{\perp}$, по которой протекает постоянный электрический ток. Предположим, что величина плотности тока $\vec{j}$ постоянна в сечении проводника, поэтому сила тока равна $I = jS_{\perp}$. По закону Ома $\vec{j} = \gamma\vec{E} = \frac{1}{\rho}\vec{E}$, где ρ - удельное сопротивление проводника. На поверхности проводника вектор $\vec{H}$ направлен по касательной к силовой линии Г, а его величина $H = \frac{I}{2\pi r}$, где r – радиус проводника. Направления $\vec{H}$ и $\vec{j}$ согласованы правилом буравчика, и направлены перпендикулярно друг другу, но $\vec{j} \parallel \vec{E}$, поэтому $\vec{H} \perp \vec{E}$. Тогда на поверхности проводника вектор



Пойнтинга $\vec{\Pi} = \vec{E} \times \vec{H}$ направлен вглубь проводника, т.е. против вектора $d\vec{S}$. Найдём поток вектора Пойнтинга через (боковую) поверхность проводника.

$$\oint\!\!\oint_{S_{БОКОВ}} \left(\vec{\Pi}, d\vec{S}\right) = -\oint\!\!\oint_{S_{БОКОВ}} \left|\vec{\Pi}\right| dS = -\oint\!\!\oint_{S_{БОКОВ}} EHdS .$$

Здесь учтено, что $\left|\vec{\Pi}\right| = EH\sin 90^0 = EH$ и что векторы $d\vec{S}$ и $\vec{\Pi}$ направлены противоположно.

Т.к. $E = j\rho = \frac{I}{S_{\perp}}\rho$, $S_{БОКОВ} = 2\pi rl$, то

$$\oint\!\!\oint_{S_{БОКОВ}} \left(\vec{\Pi}, d\vec{S}\right) = -EH \oint\!\!\oint_{S_{БОКОВ}} dS = -\frac{I}{S_{\perp}}\rho\frac{I}{2\pi r}2\pi rl = -I^2\rho\frac{l}{S_{\perp}} = -I^2R ,$$

где $R = \rho\frac{l}{S_{\perp}}$ электрическое сопротивление проводника. Итак, поток вектора Пойнтинга через боковую поверхность проводника равен по величине мощности тепловыделения в проводнике (по закону Джоуля-Ленца):

$$\oiint\limits_{S_{БОКОВ}} \left(\vec{\Pi}, d\vec{S}\right) = -\frac{d\tilde{Q}}{dt}.$$

Следовательно, $-\frac{dW}{dt} = \oiint\limits_{S}\left(\vec{\Pi}, d\vec{S}\right) + \frac{d\tilde{Q}}{dt} = 0$ - энергия электромагнитного поля в проводнике не меняется.♣

Рассмотрим в некоторой инерциальной системе отсчёта плоскую электромагнитную волну, движущуюся вдоль оси Z. Следовательно, вектор Пойнтинга $\vec{\Pi}$ тоже направлен вдоль оси Z. Пусть S_Z - малая площадка, перпендикулярная оси Z (и вектору Пойнтинга). Предположим, что волна полностью поглощается веществом этой площадки. Как известно, в электромагнитном поле на тела действуют силы, создающие давление, равное по величине объёмной плотности энергии $p=w$. Поэтому величина силы, действующей на площадку равна $F=pS_Z$. Вектор этой силы направлен перпендикулярно площадке в направлении движения волны, т.е. вдоль оси Z, поэтому можно написать, что $F_Z=pS_Z$. За малый промежуток времени dt импульс этой силы будет равен $F_Z dt = pS_Z dt = \frac{wS_Z vdt}{v} = \frac{dW}{v}$, где $dW = wS_Z vdt$ - величина энергии волны, поглощенной площадкой за время dt, а v – фазовая скорость волны. Импульс силы, действующей на площадку, равен изменению импульса этой площадки вдоль оси Z: $dP_Z = \frac{dW}{v}$.

Если предположить, что импульс площадки до падения на неё электромагнитной волны был равен нулю, то, спустя некоторый промежуток времени, у площадки появится импульс, величина которого прямо пропорциональна величине энергии, поглощенной за этот промежуток времени:

$$P = \frac{W}{v}.$$

Если рассматривать систему волна-площадка как замкнутую, то в этой системе импульс сохраняется, следовательно, изменение импульса площадки равно изменению импульса волны. Таким образом, электромагнитной волне следует приписать величину импульса P, величина которого связана с энергией W, переносимой волной с фазовой скоростью, соотношением

$$P = \frac{W}{v}.$$

Тогда единице объёма волны можно приписать величину удельного импульса

$$P_{УД} = \frac{P}{V} = \frac{W}{vV} = \frac{w}{v}$$

Но из выражения $\vec{\Pi} = w\vec{v}$ следует, что $w = \frac{\left|\vec{\Pi}\right|}{v}$. Поэтому единичный объём электромагнитной волны обладает импульсом, величина которого $P_{УД} = \frac{\left|\vec{\Pi}\right|}{v^2}$. Поэтому в векторном виде

$$\vec{P}_{УД} = \frac{\vec{\Pi}}{v^2} = \frac{\vec{E}\times\vec{H}}{v^2}.$$

Замечание. Из результатов, полученных в СТО, следует соотношение между энергией W, импульсом P и массой покоя m_0 материальных тел

$$W^2 - P^2c^2 = m_0^2c^4.$$

В вакууме скорость электромагнитной волны равна c, поэтому для импульса и энергии некоторого объёма волны

$$P = \frac{W}{c}.$$

Следовательно, масса покоя электромагнитного поля в этом объёме волны равна нулю $m_0 = 0$.

За малый промежуток времени dt изменение импульса ориентированной площадки S_Z, полностью поглощающей электромагнитную волну, равно $dP_Z = \frac{dW}{v}$. Но при отсутствии тепловыделения (по закону Джоуля-Ленца) из теоремы Пойнтинга следует равенство

$$-\frac{dW}{dt} = \oiint_S \left(\vec{\Pi}, d\vec{S}\right).$$

Здесь S – это замкнутая поверхность, внутри которой находится рассматриваемая площадка S_Z. В случае полного поглощения электромагнитной волны вектор Пойнтинга отличен от нуля только на площадке S_Z, поэтому

$$\oiint_S \left(\vec{\Pi}, d\vec{S}\right) = \iint_{S_Z} \left(\vec{\Pi}, d\vec{S}\right).$$

При этом вектор Пойнтинга перпендикулярен к площадке S_Z, т.к. по условию он направлен вдоль оси Z: $\vec{\Pi} = \left(0, 0, \Pi_Z\right)$. Следовательно,

$$\oiint_S \left(\vec{\Pi}, d\vec{S}\right) = \iint_{S_Z} \left(\vec{\Pi}, d\vec{S}\right) = \iint_{S_Z} \Pi_Z \, cos\left(\widehat{\vec{\Pi}, d\vec{S}}\right) dS.$$

Если вектор Пойнтинга представить в виде сумме координатных векторов

$$\vec{\Pi} = \vec{\Pi}_X + \vec{\Pi}_Y + \vec{\Pi}_Z, \text{ где } \vec{\Pi}_X = \left(\Pi_X, 0, 0\right),\ \vec{\Pi}_Y = \left(0, \Pi_Y, 0\right),\ \vec{\Pi}_Z = \left(0, 0, \Pi_Z\right),$$

то будет справедливым соотношение

$$\oiint_S \left(\vec{\Pi}_Z, d\vec{S}\right) = \iint_{S_Z} \left(\vec{\Pi}_Z, d\vec{S}\right) = \iint_{S_Z} \Pi_Z \, cos\left(\widehat{\vec{\Pi}, d\vec{S}}\right) dS.$$

поэтому в данном случае

$$\oint\!\!\!\oint_S \left(\vec{\Pi}, d\vec{S}\right) = \oint\!\!\!\oint_S \left(\vec{\Pi}_Z, d\vec{S}\right).$$

Поэтому изменение импульса площадки вдоль оси Z равно

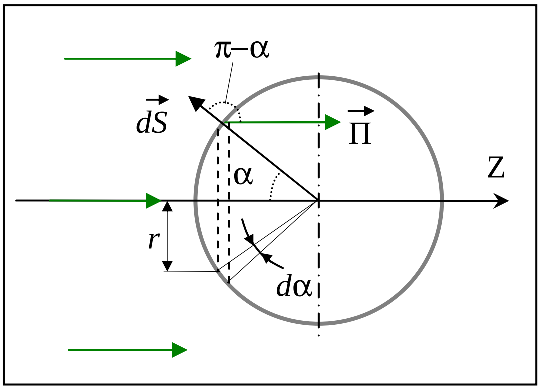
$$\frac{dP_Z}{dt} = -\frac{1}{v}\oint\!\!\!\oint_S \left(\vec{\Pi}_Z, d\vec{S}\right).$$

Слева стоит мгновенное изменение импульса площадки вдоль оси Z. Так как система отсчёта инерциальная, то справа, по второму закону Ньютона, должна стоять проекция суммы сил, действующих на площадку со стороны электромагнитной волны, на это же направление Z:

$$F_Z = -\frac{1}{v}\oint\!\!\!\oint_S \left(\vec{\Pi}_Z, d\vec{S}\right),$$

где *v* – фазовая скорость волны (в вакууме *v*=*c*), *S* – ориентированная (наружу) замкнутая поверхность, внутри которой находится площадка.

Пример. На поверхность шара радиуса R, находящегося в вакууме, падает плоская электромагнитная волна. Длина волны много больше радиуса шара λ>>R. Найти силу, действующую на шар в случае полного поглощения им волны. Максимальная напряженность электрического поля в волне равна E_0.



Решение. Введём ось Z вдоль направления падения волны. Тогда вектор Пойнтинга $\vec{\Pi} = \vec{\Pi}_Z = (0,0,\Pi)$.

Величина $\left|\vec{\Pi}\right| = \left|\vec{E}\times\vec{H}\right| = EH$.

В вакууме у плоской электромагнитной волны $H = \frac{E}{Z_0}$, где $Z_0 \approx 377$ Ом – волновое сопротивление.

$$\left|\vec{\Pi}\right| = \frac{E_0^2}{Z_0}cos^2\left(\omega t - kz + \varphi\right).$$

Скорость света в вакууме v=c, поэтому проекция силы на ось Z равна $F_Z = -\frac{1}{c}\oint\!\!\!\oint_S \left(\vec{\Pi}_Z, d\vec{S}\right)$.

Вводим угловую координату α. Тогда

$$\oint\!\!\!\oint_S \left(\vec{\Pi}_Z, d\vec{S}\right) = \oint\!\!\!\oint_S \Pi_Z\, cos\left(\pi - \alpha\right)dS .$$

Угол α и величина Π_Z одинаковые на участках поверхности *dS*, образующих кольцо радиусом $r = R\,sin\,\alpha$ и шириной $dl = Rd\alpha$. Площадь этого кольца $dS_K = 2\pi r\cdot dl = 2\pi R\,sin\,\alpha\cdot Rd\alpha$, поэтому

$$\oiint_S \left(\vec{\Pi}_Z, d\vec{S}\right) = \oiint_S \Pi_Z \cos(\pi-\alpha)\, dS = \oiint_S \Pi_Z \cos(\pi-\alpha)\, dS_K = -\int_0^{\pi/2} \Pi_Z \cos(\alpha)\, 2\pi R \sin\alpha \cdot R d\alpha .$$

Т.к. $\lambda >> R$, то на поверхности шара величину $\left|\vec{\Pi}\right| = \frac{E_0^2}{Z_0}\cos^2(\omega t - kz + \varphi)$ в данный момент времени можно считать постоянной.

$$\oiint_S \left(\vec{\Pi}_Z, d\vec{S}\right) = -\int_0^{\pi/2} \Pi_Z 2\pi R^2 \sin\alpha \cdot d(\sin\alpha) = -\left|\vec{\Pi}\right| \pi R^2 \sin^2\alpha \Big|_0^{\pi/2} = -\left|\vec{\Pi}\right| \pi R^2 .$$

Поэтому

$$F_Z = -\frac{-\left|\vec{\Pi}\right|\pi R^2}{c} = \frac{\left|\vec{\Pi}\right|\pi R^2}{c} = \frac{\pi R^2}{c}\frac{E_0^2}{Z_0}\cos^2(\omega t - kz + \varphi). \clubsuit$$

Как известно из прошлого семестра, интенсивность волны - это средняя мощность, переносимая волной через единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны.

Соответственно, *интенсивность электромагнитной волны* - усреднённое значение модуля вектора Пойнтинга.

$$I = <\left|\vec{\Pi}\right|> = \frac{E_0^2}{Z_0} < \cos^2(\omega t - kz + \varphi) > = \frac{E_0^2}{2Z_0} .$$

Таким образом, *интенсивность электромагнитной волны пропорциональна квадрату амплитуды напряжённости электрического поля*.

Волна, в которой вектор $\vec{E}$ (и, соответственно, $\vec{H}$) колеблется в одной плоскости, называется *линейно-поляризованной*. Например, если вектор $\vec{E} = (E_X, 0, 0)$ совершает колебания в плоскости, образованной осями X и Z, то такая плоскость называется *плоскостью поляризации волны*.

В волне, соответствующей суперпозиции волн для векторов $\vec{E}_1 = (E_X, 0, 0)$, $\vec{E}_2 = (0, E_Y, 0)$, колебания векторов происходят с одинаковой частотой, но в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Конец вектора $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ будет описывать в плоскости (X, Y) фигуру Лиссажу, являющуюся, в зависимости от разности фаз этих колебаний, либо эллипсом, либо отрезком прямой.

Если фигура является эллипсом, то говорят, что волна имеет *эллиптическую* поляризацию, а если – отрезок прямой, то – поляризация линейная.

Интерферируют между собой поперечные волны одинаковой линейной поляризации.

Излучение электромагнитных волн. Нормальная и аномальная дисперсия. Закон Бугера. Рассеяние света.

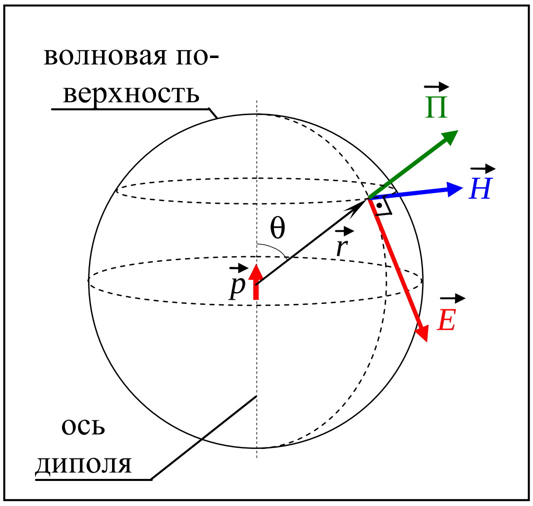
Как показывает опыт, электрические заряды, движущиеся с ускорением, излучают электромагнитные волны.

Ускоренное движение электрических зарядов наблюдается, например, при протекании *переменного* тока в проводниках. Следовательно, переменный электрический ток должен создавать в окружающем пространстве электромагнитные волны.

Для создания (и приёма) электромагнитных волн используют, в частности устройства, содержащие колебательный контур, состоящий из катушки индуктивности и конденсатора. Частота волны в этом случае равна частоте контура.

Вибратор Герца (*диполь Герца*, *антенна Герца*) — простейшая система для получения электромагнитных колебаний - это электрический диполь, дипольный момент которого быстро изменяется во времени. Технический эквивалент — небольшая антенна, размер которой много меньше длины волны.

Назван по имени Генриха Герца (Генрих Рудольф Герц (1857 - 1894) — немецкий физик), который использовал подобное устройство в качестве излучающей и приёмной антенн в своих опытах, подтвердивших существование электромагнитных волн.



Рассмотрим колеблющийся диполь, у которого вектор электрического дипольного момента меняется во времени $\vec{p}=\vec{p}(t)$. В этом случае решение системы уравнений Максвелла (записанных с помощью *векторных потенциалов*) показывает, что в окружающем пространстве будут создаваться электромагнитные волны. Диполь называется *элементарным*, если длин волны излучения λ много больше длины диполя *l*.

При этом все пространство вокруг диполя можно условно разделить на две части – **ближнюю** и **дальнюю** (*волновую*) зоны. В ближней зоне картина излучения сложная, энергия постоянно перекачивается от излучателя в окружающее пространство и обратно.

Зоной излучения является *волновая зона*. Для точек этой зоны выполняется условие: расстояние до диполя много больше длины волны излучения $r \gg \lambda$.

В волновой зоне волновой поверхностью является сфера. Вектор $\vec{E}$ направлен по касательной к меридианам этой сферы, а вектор $\vec{H}$ - по касательной к параллелям, т.е. $\vec{E}\perp\vec{H}$, а вектор Пойнтинга $\vec{\Pi} = \vec{E} \times \vec{H}$ направлен по радиусу *наружу*. Амплитуды векторов обратно пропорциональны расстоянию от диполя

$$E_0 \sim \frac{1}{r} sin\theta,\ H_0 \sim \frac{1}{r} sin\theta$$

где θ - азимутальный угол (угол между осью диполя и радиус вектором $\vec{r}$).

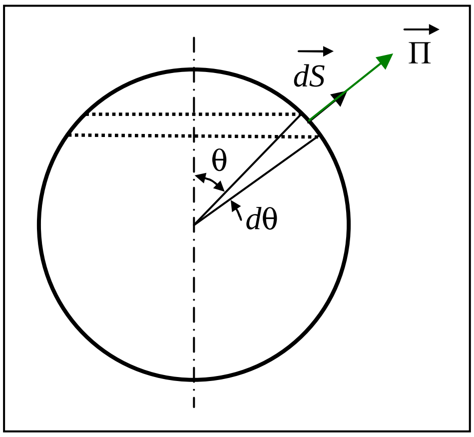
Соотношения между амплитудами в сферической волне такие же, как и для плоской волны

$$\frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}.$$

Величина вектора Пойнтинга $\Pi \sim \frac{sin^2\theta}{r^2}$ обратно пропорциональна квадрату расстояния.

Следовательно, в направлении оси диполя (т.е. θ=0) нет излучения, а в перпендикулярном направлении (θ=90^0) излучение максимальное.

Пример. Найдём зависимость мощности излучения диполя от расстояния в волновой зоне.



Мощность излучения равна потоку вектора Пойнтинга, например, через сферу радиуса R>>λ, внутри которой находится диполь $N = \oiint\limits_S \left(\vec{\Pi}, d\vec{S}\right)$.

На поверхности сферы векторы $d\vec{S}$ и $\vec{\Pi}$ сонаправлены в каждой точке. Т.к. $\Pi \sim \frac{sin^2\theta}{R^2}$, то при θ=const величина Π не меняется, поэтому на поверхности выделим тонкое кольцо, отсекаемое двумя конусами, выходящими из центра сферы под углами θ и θ+*d*θ к оси диполя. Площадь этого кольца $dS_K = 2\pi R\, sin\theta \cdot R d\theta$, откуда

$$N = \oiint\limits_S \left(\vec{\Pi}, d\vec{S}\right) = \oiint\limits_S \Pi dS_K \sim \int\limits_0^\pi \frac{sin^2\theta}{R^2} 2\pi R\, sin\theta \cdot R d\theta,\ N \sim \left(-2\pi \int\limits_0^\pi \left(1 - cos^2\theta\right) d\left(cos\theta\right)\right) = \frac{8}{3}\pi$$

т.е. поток вектора Пойнтинга через сферу, в центре которой находится диполь, не зависит от расстояния до диполя $\oiint\limits_S \left(\vec{\Pi}, d\vec{S}\right) = const$.♣

Следовательно, общая мощность излученной электромагнитной волны (в вакууме) не меняется с расстоянием – через любую замкнутую поверхность (в волновой зоне), охватывающую диполь, за равные промежутки времени проходит одинаковое количество энергии.

Мощность излучения *элементарного диполя* определяется выражением

$$N = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2}{3c^3} \left(\frac{d^2\vec{p}}{dt^2}\right)^2.$$

В частности, когда один из зарядов покоится, а второй вращается вокруг него с угловой скоростью ω, получаем, что $\frac{d^2\vec{p}}{dt^2} = -\omega^2\vec{p}$. Но $\vec{p} = q\vec{l}$, $\frac{d^2\vec{p}}{dt^2} = -q\omega^2\vec{l}$, тогда

$$N = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q^2}{3c^3}\omega^4 l^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q^2}{3c^3}a_n^{\ 2},$$

где $a_n = \omega^2 l$ - нормальное ускорение вращающегося заряда. Оказывается, что эту формулу можно обобщить. Мощность излучения (при небольших величинах ускорения a)

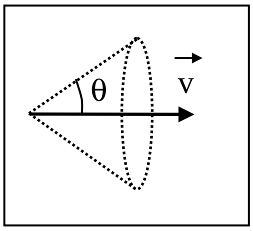
$$N = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q^2}{3c^3}\vec{a}^2.$$

При этом заряженная частица теряет энергию, поэтому на заряженную частицу действует сила, называемая силой *радиационного трения*, величина которой определяется производной от ускорения

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q^2}{3c^3}\frac{d\vec{a}}{dt}.$$

Замечание. Механическая модель атома состоит из тяжёлого положительно заряженного ядра и лёгких отрицательно заряженных электронов, вращающихся вокруг него. Следовательно, электроны в этой модели движутся с ускорением, поэтому атом должен терять энергию на излучение. И, в конце концов, электроны должны упасть на ядро. Т.е. механическая модель атома является неустойчивой. В этом заключается неустранимая проблема классического описания строения атома. Данное противоречие отсутствует в *квантовой механике*.

Эффект Вавилова-Черенкова



Излучение Вавилова-Черенкова возникает при *равномерно*м движении заряда в среде со скоростью, превышающей фазовую скорость света $v > \frac{c}{n}$ в этой среде. Частица теряет энергию и тормозится. В излучении преобладают короткие волны. Оно испускается не по всем направлениям, а лишь вдоль образующей конуса, ось которого совпадает с направлением скорости частицы $\cos\theta = \frac{c}{nv}$. Это явление широко используется в науке и технике.

Источники электромагнитного излучения.

Источники электромагнитного излучения можно разделить на естественные и искусственные.

Искусственными источниками являются устройства по генерации радиоволн, светового и теплового излучения. Это излучение генерируется при подводе к системе энергии. При прекращении подвода энергии излучение, в основном, прекращается.

Естественными источниками электромагнитного излучения являются протекающие физические и химические природные процессы.

Например, процессы горения, а также термоядерные процессы в звёздах и т.д., или атмосферные явления (молнии).

Излучение заряженных частиц при движении в магнитном поле планет.

Люминесценция (нетепловое свечение вещества, происходящее после поглощения им энергии возбуждения).

И т.д. и т.п.

При исчерпании запаса энергии в системе такие типы излучения прекращаются.

Однако существует электромагнитное излучение всех без исключения тел, которое не может прекратиться. Это естественное излучение, вызванное тепловым движением (колебаниями) атомов и молекул, которое называется *тепловым излучением*. Особенностью теплового излучения является то, что оно происходит во всём диапазоне длин волн, а также то, что возможно тепловое равновесие в замкнутой системе между излучением и телами.

Свойства естественного излучения.

Естественное излучение можно разделить на *спонтанное* и *вынужденное*.

При спонтанном излучении каждый атом (молекула) испускает электромагнитные волны самопроизвольно, не согласовано с другими атомами (спонтанно). При этом частота испускаемой волны, её фаза, направление распространения, поляризация определяются только состоянием атома.

При вынужденном (*индуцированном*) излучении атом испускает волну под воздействием внешнего излучения. Особенностью такого излучения является то, что испускаемые волны имеют частоту, фазу, направление и поляризацию такую же как и у внешнего излучения.

В естественных источниках относительная доля вынужденного излучения мала по сравнению с долей спонтанного излучения.

Преобладание доли индуцированного излучения над спонтанным излучением удалось добиться в устройствах по генерации излучения – мазерах и лазерах.

Процесс испускания атомом вещества электромагнитной волны длится, в среднем, около 10^{-8} с. За это время испускается отрезок волны, называемый цугом, длиной около 3 м. В испущенной волне частота не является постоянной, а меняется в небольшом интервале, который называют *естественной шириной спектральной линии*. Кроме того, в процессе испускания волны на атом действует сила реакции (отдачи) со стороны волны, что приводит к изменению импульса атома, а это, в свою очередь, по эффекту Доплера меняет частоту волны в процессе испускания. Всё это говорит о том, что испущенная волна не является строго монохроматичной.

Немонохроматичную волну можно с помощью преобразований Фурье, представить в виде суперпозиции нескольких *монохроматичных* волн с разными частотами. Набор монохроматических волн с близкими частотами, которые при суперпозиции образую единую волну (вообще говоря, немонохроматичную), принято называть *волновым пакетом*.

Замечание. Применение электромагнитных волн в качестве сигнала возможно, если удастся эту волну не только испустить, но и зарегистрировать. Однако если бы волна была строго монохроматичной, а значит и бесконечной по протяжённости, то её нельзя было бы выделить среди других подобных волн. Поэтому немонохроматичность волны и её ограниченность являются *необходимым условием* применения её в качестве сигнала. Но подобную волну можно представить как суперпозицию монохроматичных волн с близкими частотами. Как известно, подобная суперпозиция приводит к явлению, которое называется *биением*. Амплитуда колебаний в каждой точке пространства, где распространяется подобная волна, в случае биений должна меняться с течением времени – от нулевой до некоторой максимальной и затем, наоборот, уменьшаться. Именно изменение амплитуды и поддаётся регистрации в качестве сигнала. Т.е. сигнал распространяется со скоростью равной скорости движения максимума суммарной амплитуды суперпозиции волн.

Будем рассматривать классическую модель взаимодействия электромагнитного излучения с веществом, достоинством такого рассмотрения является простота описания. Эта модель приводит к качественно верным результатам.

При колебаниях электроны движутся с ускорением, поэтому излучают электромагнитные волны такой же частоты, что и частота падающей волны. Мощность излучения пропорциональна квадрату ускорения. При колебаниях амплитуда ускорения равна $a_{MAX} = A\omega^2$. Следовательно, мощность излучения электронов под действием падающей волны пропорциональна 4-й степени частоты волны. Это излучение называется *рассеянным излучением*.

Атомы (и молекулы) вещества тоже могут совершать колебания под действием падающей волны. Кинетическая энергия колебаний пропорциональная квадрату скорости $v_{MAX} = \omega A$, т.е. квадрату частоты колебаний. Увеличение кинетической энергии колебаний приводит к увеличению внутренней энергии тела. Таким образом, часть энергии волны *поглощается веществом*.

Закон Бугера.

При рассеянии и поглощении энергия падающей волны уменьшается. При прохождении волной расстояния dl интенсивность I уменьшается на величину dI. Введём коэффициент пропорциональности k, называемый *коэффициентом поглощения* (единицы измерения 1/м)

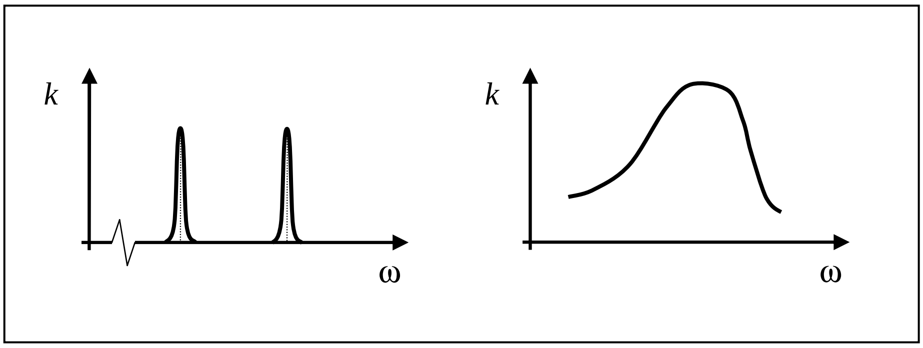
$$dI = -k \cdot I \cdot dl .$$

Откуда получаем закон уменьшения интенсивности (*закон Бугера*) $I = I_0 e^{-kl}$

где I_0 – величина интенсивности при l=0. При прохождении расстояния, величина которого равна обратному коэффициенту поглощения, интенсивность излучения уменьшается в e раз.

Так как причиной появления рассеянного излучения и поглощения энергии являются вынужденные колебания электронов и атомов, то вблизи резонансных частот должно наблюдаться резкое увеличение амплитуды колебаний, следовательно, коэффициент поглощения k зависит от частоты излучения. Таких частот, вообще говоря, может быть несколько.

Для веществ, атомы которых слабо взаимодействуют между собой (газы при невысоких давлениях), коэффициент поглощения заметно отличен от нуля только вблизи резонансных частот поглощения (так называемый *линейчатый спектр поглощения*). Например, результаты опытов показывают, что спектр солнечного излучения непрерывный. Но при прохождении солнечного света через атмосферу Солнца поглощается часть излучения при резонансных частотах, соответствующих газам, находящихся в составе атмосферы Солнца. Изучая эти частоты, можно

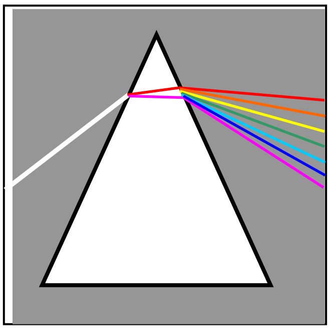


определить химический состав атмосферы Солнца (или звёзд).

Для газов при высоких давлениях, жидкостей и твердых тел характерны широкие полосы поглощения.

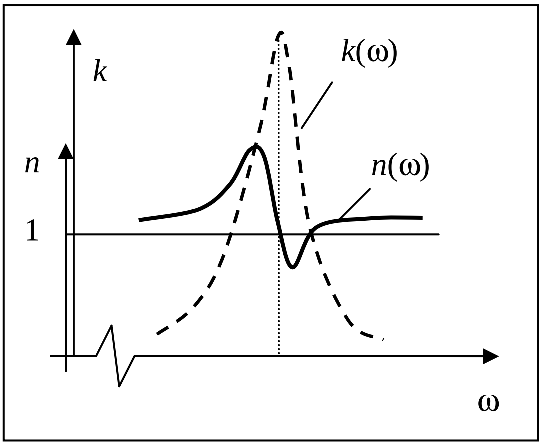
Дисперсия.

Рассмотрим вещества, не являющиеся проводниками (или плазмой). В таких телах, когда внешнее поле отсутствует $\vec{E}_{ВНЕШН} = \vec{0}$, усредненноё положение электрических зарядов является равновесным. Под воздействием внешнего электрического поля более лёгкие электроны смещаются и начинают совершать колебания около положения равновесия. Это приводит к тому, что электрические диполи в диэлектрике совершают вынужденные колебания, следовательно, вектор поляризованности вещества колеблется. В итоге, показатель относительной диэлектрической проницаемости зависит от частоты падающей волны ε(ω). Показатель преломления вещества равен $n = \sqrt{\mu\varepsilon}$. Большинство оптически прозрачных веществ являются парамагнетиками ($\mu \approx 1$), поэтому $n \approx \sqrt{\varepsilon(\omega)}$.



Явление зависимости показателя преломления вещества от длины волны излучения называется *дисперсией*. *Нормальная дисперсия* – показатель преломления увеличивается при уменьшении длины волны (увеличении частоты). Обратная зависимость носит название *аномальной дисперсии*.

Нормальная дисперсия наблюдается, в частности, в опыте Ньютона по разложению белого света в спектр при прохождении его через стеклянную призму. В этом опыте у красного света, имеющего бóльшую длину волны, меньший показатель преломления, чем у фиолетового, длина волны которого меньше.



Аномальная дисперсия в веществе наблюдается в области частот, соответствующих сильному поглощению.

Если совместить два графика – зависимость коэффициента поглощения и показателя преломления от частоты, то можно увидеть, что аномальная дисперсия в веществе наблюдается в области частот, соответствующих сильному поглощению. Аномальную дисперсию можно наблюдать, например, в разреженных газах и парах металлов.

Групповая скорость.

Электромагнитные волны, испущенные естественными источниками, не являются монохроматичными, но их можно представить в виде волнового пакета – как суперпозицию монохроматичных волн с близкими частотами. Из-за дисперсии монохроматичные волны, составляющие пакет, будут иметь разные фазовые скорости в веществе. Если вещество является *сильно диспергирующим*, т.е. показатель преломления сильно меняется даже при небольшом изменении частоты, то разные фазовые скорости волн будут являться причиной распадения пакета – более быстрые волны обгонят более медленные.

Если волновой пакет распространяется в слабо диспергирующей среде, то он будет сохранять целостность длительное время, хотя его «форма» будет меняться.

Пример. Рассмотрим плоскую электромагнитную волну, являющуюся суперпозицией двух монохроматических волн с близкими частотами ω и $\omega+\Delta\omega$, $\Delta\omega \ll \omega$ и распространяющуюся в веществе. Частоты волн разные, поэтому им соответствуют разные показатели преломления n и $n+\Delta n$, где $\Delta n = \frac{dn}{d\omega}\Delta\omega$. Поэтому волны имеют разные фазовые скорости $v_\Phi(\omega) = \frac{c}{n(\omega)}$.

Предполагаем, что вещество является *слабо диспергирующим* при данной частоте: $\frac{\Delta n}{n}=\frac{dn}{d\omega}\frac{\Delta\omega}{n}<<1$, т.е. если даже частота изменится в несколько раз $\Delta\omega=N\omega$, то изменение показателя преломления будет малым $\frac{\Delta n}{n}=\frac{dn}{d\omega}\frac{\omega}{n}N<<1$. Иллюстрацией этого понятия является дисперсия белого света в опыте Ньютона. Хотя частота фиолетового света практически в два раза больше частоты красного света, но относительное изменение показателя преломления среды невелико.

Уравнение плоской волны, которая движется вдоль оси X: $A=A_0\cos(\omega t-kx)$. (В качестве величины A можно взять либо *E* либо *H*). Но $k=\frac{\omega}{v_\Phi}=\frac{\omega}{c}n$, поэтому уравнения волн можно записать в виде $A_1=A_0\cos\left(\omega t-\frac{\omega n}{c}x\right)$,

$$A_2=A_0\cos\left((\omega+\Delta\omega)t-\frac{(\omega+\Delta\omega)\left(n+\frac{dn}{d\omega}\Delta\omega\right)}{c}x\right)=A_0\cos\left((\omega+\Delta\omega)t-\frac{\omega n+\left(\omega\frac{dn}{d\omega}+n\right)\Delta\omega+\frac{dn}{d\omega}(\Delta\omega)^2}{c}x\right)$$

Отбросим величину $\frac{dn}{d\omega}(\Delta\omega)^2$, считая её малой, и найдём суперпозицию волн

$$A_\Sigma=A_1+A_2=A_0\cos\left(\omega t-\frac{\omega n}{c}x\right)+A_0\cos\left((\omega+\Delta\omega)t-\frac{\omega n+\left(\omega\frac{dn}{d\omega}+n\right)\Delta\omega}{c}x\right)$$

$$A_\Sigma=2A_0\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t-\frac{\left(\omega\frac{dn}{d\omega}+n\right)\Delta\omega}{2c}x\right)\cos\left(\left(\omega+\frac{\Delta\omega}{2}\right)t-\frac{\omega n+\left(\omega\frac{dn}{d\omega}+n\right)\frac{\Delta\omega}{2}}{c}x\right)$$

Мы получили уравнение, описывающее в каждой фиксированной точке оси X биения. Эти биения тоже распространяются вдоль оси X. Можно считать, что величина амплитуды $2A_0$ биений является плоской волной

$$A_Б=2A_0\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t-\frac{\left(\omega\frac{dn}{d\omega}+n\right)\Delta\omega}{2c}x\right),$$

движущейся вдоль оси с фазовой скоростью $v_{ГР}=\dfrac{\left(\dfrac{\Delta\omega}{2}\right)}{\left(\dfrac{\left(\omega\dfrac{dn}{d\omega}+n\right)\Delta\omega}{2c}\right)}=\dfrac{c}{\omega\dfrac{dn}{d\omega}+n}$.

Эта скорость является *характеристикой группы* волн, одновременно распространяющих в одной области пространства, поэтому её принято называть *групповой скоростью*. Учитывая условие слабой дисперсии $\dfrac{dn}{d\omega}\dfrac{\omega}{n}<<1$, получаем

$$v_{ГР}=\frac{c}{\omega\dfrac{dn}{d\omega}+n}=\frac{c}{n\left(1+\dfrac{\omega}{n}\dfrac{dn}{d\omega}\right)}=\frac{c}{n}\left(1-\frac{\omega}{n}\frac{dn}{d\omega}+...\right)\approx\frac{c}{n}-\frac{c}{n}\frac{\omega}{n}\frac{dn}{d\omega}=v-v\frac{\omega}{n}\frac{dn}{d\omega}.$$

(Здесь использована формула для суммы бесконечной геометрической прогрессии с малым показателем и определение фазовой скорости $v=\dfrac{c}{n}$.)

Так как $\dfrac{dv}{d\omega}=\dfrac{d}{d\omega}\left(\dfrac{c}{n}\right)=-c\dfrac{1}{n^2}\dfrac{dn}{d\omega}=-\dfrac{c}{n}\dfrac{1}{n}\dfrac{dn}{d\omega}=-\dfrac{v}{n}\dfrac{dn}{d\omega}$, то $v_{ГР}=v-\omega\dfrac{v}{n}\dfrac{dn}{d\omega}=v+\omega\dfrac{dv}{d\omega}$.

Перейдём в этом выражении от циклической частоты ω к длине волны λ.

Т.к. $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\pi v}{\lambda}$, то при фиксированной скорости v выполняется $d\omega=-\dfrac{2\pi v}{\lambda^2}d\lambda$, поэтому

$$v_{ГР}=v+\frac{2\pi v}{\lambda}\frac{dv}{\left(-\dfrac{2\pi v}{\lambda^2}d\lambda\right)}=v-\frac{2\pi v\lambda^2}{\lambda}\frac{dv}{2\pi v d\lambda}=v-\lambda\frac{dv}{d\lambda}.\clubsuit$$

Итак, групповая скорость группы волн, одновременно распространяющихся в одной области пространства (волнового пакета), связана с фазовой скоростью волн формулой Рэлея $v_{ГР}=v-\lambda\dfrac{dv}{d\lambda}$. *В веществе электромагнитный сигнал распространяется именно с групповой скоростью.*

При аномальной дисперсии показатель преломления среды уменьшается с увеличением частоты, т.е. с уменьшением длины волны. Поэтому фазовая скорость с уменьшением длины волны тоже уменьшается, следовательно $\dfrac{dv}{d\lambda}>0$. В случае, когда $n<1$ фазовая скорость становится больше чем скорость в вакууме $v=\dfrac{c}{n}>c$, но групповая скорость $v_{ГР}=v-\lambda\dfrac{dv}{d\lambda}<c$, поэтому противоречия с СТО нет.

Замечание. Опыт показывает, что если средой является металл или плазма, то существует определенная частота ω_P, называемая *плазменной частотой*, такая, что электромагнитные волны с меньшей частотой $\omega<\omega_P$ полностью отражаются от тела, для волн с большей частотой $\omega>\omega_P$ металл или плазма являются полностью прозрачными.

Например, очень тонкий слой золота, нанесённый напылением на поверхность стекла, пропускает видимый свет полностью, а инфракрасное излучение не проходит.

Расчёты показывают, что величина критической частоты ω_P зависит от концентрации заряженных частиц.

Верхние слои атмосферы Земли представляют собой ионизированную плазму и образуют *ионосферу*. (Ионизация происходит под действием солнечных и космических лучей.). Опыт показывает, что радиоволны длиной более 10 метров полностью отражаются от ионосферы, что широко используется в радиосвязи. Волны меньшей длины, наоборот, свободно проходят сквозь ионосферу.